PANJANG DAN JARAK VEKTOR PADA RUANG HASIL KALI DALAM

Perlu diingat kembali definisi panjang dan jarak suatu vektor pada ruang hasil kali dalam Euclid, yaitu runag vektor yang hasil kali dlamnya didefinisikan sebagai hasil kali titik (hasil kali dalam Euclid). Panjang vektor $\bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) \in R^n$ didefinisikan sebagai:

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2} = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2 + ... + v_n v_n} = \sqrt{\bar{v}.\bar{v}}$$

dan jarak antara vektor $\bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ dan $\bar{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} d(\bar{v},\bar{u}) &= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + ... + (v_n - u_n)^2} \\ &= \sqrt{(v_1 - u_1)(v_1 - u_1) + (v_2 - u_2)(v_2 - u_2) + ... + (v_n - u_n)(v_n - u_n)} \\ &= \sqrt{(\bar{v} - \bar{u})(\bar{v} - \bar{u})} \\ &= \|\bar{v} - \bar{u}\|^{1/2} \end{aligned}$$

Sejalan dengan generalisasi definisi hasil kali dalam pada sebarang ruang vektor, maka secara analog, didefinisikan panjang dan jarak vektor pada sebarang ruang hasil kali dalam sebagai berikut:

Panjang vektor $\bar{v} \in V$, yang selanjutnya dinotasikan dengan $\|\bar{v}\|$, didefinisikan:

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}$$

Jarak vektor $\bar{v} \in V$ dengan $\bar{u} \in V$, yang selanjutnya dinotasikan dengan $d(\bar{v},\bar{u})$, didefinisikan:

$$d(\bar{v},\bar{u}) = \|\bar{v} - \bar{u}\|^{1/2}$$

Contoh 2.2

Diberikan ruang vektor R^3 dan hasil kali dalam yang didefinisikan $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$, hitung panjang vektor $\bar{v} = (3,-1,4)$ dan jarak vektor $\bar{v}$ dan $\bar{u}$ jika $\bar{u} = (0,-2,1)$.

Jawab:

Panjang vektor $\bar{v}$ adalah $\|\bar{v}\| = \sqrt{3.3.3 + 2.(-1)(-1) + 4.4} = \sqrt{27 + 2 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Jarak vektor $\bar{v}$ dan $\bar{u}$ adalah:

$$d(\bar{v},\bar{u}) = \|\bar{v}-\bar{u}\|^{1/2} = \sqrt{(3-0)(3-0)+(-1+2)(-1+2)+(4-1)(4-1)} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$

Berikutnya diberikan sifat yang berlaku pada sebarang ruang hasil kali dalam, yang selengkapnya diberikan pada teorema berikut:

Teorema 2.1

Jika $\bar{v}$, $\bar{u}$, $\bar{w} \in V$ dengan V adalah sebarang ruang hasil kali dalam, maka berlaku:

a. $\langle \bar{0},\bar{v}\rangle = \langle \bar{v},\bar{0}\rangle = 0$

b. $\langle \bar{u},k\bar{v}\rangle = k\langle \bar{u},\bar{v}\rangle$

c. $\langle \bar{u},\bar{v}-\bar{w}\rangle = \langle \bar{u},\bar{v}\rangle - \langle \bar{u},\bar{w}\rangle$

d. $\langle \bar{u}+\bar{v},\bar{w}\rangle = \langle \bar{u},\bar{w}\rangle + \langle \bar{v},\bar{w}\rangle$

e. $\langle \bar{u}-\bar{v},\bar{w}\rangle = \langle \bar{u},\bar{w}\rangle - \langle \bar{v},\bar{w}\rangle$

Sudut Dan Orthogonalitas Pada Ruang Hasil Kali Dalam

Dalam bagian ini akan didefinisikan besarnya sudut antara dua vektor dalam ruang hasil kali dalam, dan konsep ini akan digunakan untuk memperoleh kaitan antara vektor-vektor pada ruang hasil kali dalam.

Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

Perlu diingat kembali, pada ruang hasil kali titik (dot product) berlaku bahwa jika $\bar{v}$, $\bar{u}$ merupakan vektor-vektor tak nol di R^2 atau R^3 dan θ adalah sudut antara dua vektor tersebut, maka :

$$\bar{u}.\bar{v} = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\theta$$

atau:

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}.\bar{v}}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}$$

Tujuan utama dalam bagian ini adalah mendefinisikan konsep suatu sudut antara dua vektor pada sebarang ruang hasil kali dalam. Seperti pada generalisasi dari hasil kali titik, maka konsep inipun analog dengan pendefinisian hasil kali dalam pada sebarang ruang vektor, sehingga definisi sudut antara dua vektor tak nol pada sebarang ruang hasil kali dalam adalah sebagai berikut:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}$$

Diketahui bahwa $|\cos\theta| \le 1$, sehingga setiap pasangan vektor pada ruang hasil kali dalam memenuhi pertidaksamaan :

$$\left|\frac{\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}\right| \le 1$$

Teorema 2.2. Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

Jika $\bar{u}$, $\bar{v}$ vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real, maka berlaku $\left|\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle\right| \le \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|$

Bukti

- Jika $\bar{u} = \bar{0}$, sehingga $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ dan $\|\bar{u}\| = 0$, sehingga kedua ruas sama. Dengan demikian dipenuhi.
- Asumsikan bahwa $\bar{u} \neq \bar{0}$. Misalkan $a = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle$, $b = 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, $c = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$, dan t sebarang bilangan real. Dengan menggunakan aksioma kepositifan , hasil kali dalam dari suatu vektor dengan dirinya sendiri selalu non negatif, sehingga:

  $$0 \leq \langle t\bar{u} + \bar{v}, t\bar{u} + \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle t^2 + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle t + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = at^2 + bt + c$$

  Pertidaksamaan ini berakibat bahwa polinomial kuadratik ini tidak mempunyai akar real atau akar kembar. Sehingga diskriminannya harus memenuhi pertidaksamaan $b^2 - 4ac \leq 0$. Jika dinyatakan dengan pemisalan $a = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle$, $b = 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, $c = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$, maka diperoleh:

  $$4\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 - 4\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \leq 0$$

  Atau:

  $$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

  Dengan mencari akar kuadrat dari kedua ruas dan kenyataan dari sifat nonnegatif dari hasil kali dalam, maka diperoleh:

  $$\left| \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \right| \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2} \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle^{1/2}$$

  Atau

  $$\left| \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \right| \leq \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|$$

Selanjutnya, diberikan sifat-sifat panjang dan jarak suatu vektor yang dirangkum dalam teorema berikut:

Teorema 2.3

Jika $\bar{u}$, $\bar{v}$ vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real V dan jika k sebarang skalar, maka:

a. $\left\|\bar{u}\right\| \geq 0$

b. $\left\|k\bar{u}\right\| = |k| \left\|\bar{u}\right\|$

c. $\left\|\bar{u}\right\| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

d. $\left\|\bar{u} + \bar{v}\right\| \leq \left\|\bar{u}\right\| + \left\|\bar{v}\right\|$

Teorema 2.4

Jika $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real V dan jika k sebarang skalar, maka:

a. $d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$

b. $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u})$

c. $d(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{v}$

d. $d(\bar{u}, \bar{v}) \leq d(\bar{u}, \bar{w}) + d(\bar{w}, \bar{v})$

Orthogonalitas

E_mail: karyati@uny.ac.id