1.1. Sub Ruang Vektor

Dalam membicarakan ruang vektor, tidak hanya vektoer-vektornya saja yang menarik, tetapi juga himpunan bagian dari ruang vektor tersebut yang membentuk ruang vektor lagi terhadap operasi yang sama pada ruang vektornya. Himpunan yang demikian yang selanjutnya disebut sebagai sub ruang vektor (*vector subspace*).

Definisi 1.2.1. *Andaikan V adalah ruang vektor dan S adalah himpunan bagian tak kosong dari V. Himpunan S disebut sub ruang vektor dari V jika terhadap operasi yang didefinisikan pada V, S membentuk ruang vektor.*

Contoh 1.2.1

Himpunan R^3 adalah suatu ruang vektor terhadap operasi standarnya. Himpunan $S = \{(x, y, z) \in R^3 | x + y + z = 0\}$ adalah himpunan bagian dari R^3. Telah dibuktikan pada **Contoh 1.1.3** bahwa $S = \{(x, y, z) \in R^3 | x + y + z = 0\}$ membentuk ruang vektor terhadap operasi yang didefinisikan pada R^3. Dengan demikian S merupakan sub ruang vektor R^3.

Contoh 1.2.2

Himpunan $A = \{(x, y, z) \in R^3 | x = y = 0\}$ adalah himpunan bagian dari R^3. Himpunan $A = \{(x, y, z) \in R^3 | x = y = 0\}$ ini membentuk sub ruang vektor R^3.

Sebelum dibuktikan memenuhi seluruh aksioma untuk ruang vektor, dibuktikan dahulu bahwa terhadap operasi yang didefinisikan pada R^3, bersifat tertutup.

- Ambil sebarang elemen di $A = \{(x, y, z) \in R^3 | x = y = 0\}$, sebut (x, y, z), (x', y', z'). Sehingga $x = y = 0$ dan $x' = y' = 0$, selanjutnya diperoleh : $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$. Dalam hal ini dipenuhi $x + x' = 0 + 0 = 0$ dan $y + y' = 0 + 0 = 0$. Dengan demikian $(x + x', y + y', z + z') \in A$, sehingga disimpulkan A tertutup terhadap penjumlahan.
- Ambil $(x, y, z) \in A$ dan $\alpha \in R$. Sehingga $x = y = 0$ selanjutnya diperoleh $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ dengan $\alpha.x = \alpha.0 = 0$ dan $\alpha.y = \alpha.0 = 0$. Dengan demikian $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in A$. Jadi A tertutup terhadap perkalian skalar.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa A memenuhi semua aksioma untuk ruang vektor:

- Aksioma 1

  (x, y, z), $(x', y', z') \in A$, maka (x, y, z), $(x', y', z') \in R^3$. Diketahui R^3 ruang vektor, maka pasti bersifat komutatif terhadap jumlah vektor.
- Aksioma 2

  Karena $A \subset R^3$ maka setiap elemen di A merupakan elemen di R^3. Diketahui R^3 ruang vektor, maka penjumlahan setiap elemen-elemnnya bersifat asosiatif.
- Aksioma 3

  Bentuk $\underline{0} = (0,0,0)$, maka elemen ini merupakan elemen di A. Elemen ini merupakan vekor nol di R^3, sehingga berlaku $\underline{0}+\underline{a}=\underline{a}$ untuk setiap $\underline{a}\in R^3$. Akibatnya berlaku juga untuk setiap elemen di A

- Aksioma 4

  Ambil $(x,y,z)\in A$, maka $x=y=0$ dan ($-(x,y,z))\in A$ sebab $-x=-y=-0=0$. Sehingga (x,y,z)+($-(x,y,z)$)=$\underline{0}$

- Aksioma 5

  Karena $A\subset R^3$ maka setiap elemen di A merupakan elemen di R^3. Diketahui R^3 ruang vektor, sehingga untuk setiap elemennya berlaku $\alpha\left((x,y,z)+(x',y',z')\right)=\alpha(x,y,z)+\alpha(x'+y'+z')$. Dengan alasan yang sama maka selalu dipenuhi aksioma-aksioma 6,7 dan 8.

Proposisi berikut menunjukkan hubungan yang ekuivalen suatu sub ruang vektor dengan sifat ketertutupan operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar yang harus dipenuhi oleh suatu himpunan bagian yang membentuk ruang vektor.

Proposisi 1.2.2. *Andaikan V adalah ruang vektor dan S adalah himpunan bagian tak kosong dari V. Himpunan S dikatakan sub ruang vektor dari V jika dan hanya jika:*

a. *Untuk setiap $\underline{a},\underline{b}\in S$, maka $\underline{a}+\underline{b}\in S$*

   (tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor)

b. *Untuk setiap $\underline{a}\in S$ dan $\alpha\in R$, maka $\alpha\underline{a}\in S$*

(tertutup terhadap perkalian skalar)

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Karena S merupakan sub ruang vektor dari V, maka S merupakan ruang vektor terhadap operasi biner yang didefinisikan pada V. Karena operasi biner harus bersifat tertutup , maka operasi jumlah dan perkalian skalarnya juga harus tertutup.

$(\Leftarrow)$

Dalam hal ini akan dibuktikan apabila S tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, maka S memenuhi kedelapan aksioma ruang vektor.

Karena $S \subseteq V$, maka aksioma 1,2,5,6,7 dan 8 selalu dipenuhi. Untuk aksioma 3, ambil $0 \in R$, menurut b maka dipenuhi $0.\underline{a} \in S$. Menurut sifatnya maka $0.\underline{a} = \underline{0}$ sehingga S memuat vektor nol. Untuk aksioma 4, ambil $(-1) \in R$, menurut b maka $(-1)\underline{a} \in S$ untuk setiap vektor di S. Menurut sifatnya, maka diperoleh $(-1)\underline{a} = (-\underline{a}) \in S$ untuk setiap vektor di S.

Dengan **Proposisi 1.2.2** di atas, maka untuk membuktikan suatu himpunan bagian dari suatu ruang vektor merupakan sub ruang vektor atau bukan cukup dibuktikan ketertutupannya terhadap operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalarnya. Proposisi berikut merupakan akibat dari **Proposisi 1.2.2**:

Proposisi 1.2.3. *Andaikan V adalah ruang vektor dan S adalah himpunan bagian tak kosong dari V. Himpunan S dikatakan sub ruang vektor dari V jika dan hanya jika untuk setiap $\underline{a}, \underline{b} \in S$ dan $\alpha, \beta \in R$, maka $\alpha.\underline{a} + \beta.\underline{b} \in S$*

Bukti:

Himpunan S merupakan ruang vektor dari V, sehingga menurut Proposisi 1.2.2 maka dipenuhi a dan b. Sehingga menurut b, jika $\underline{a}, \underline{b} \in S$ dan $\alpha, \beta \in R$ maka $\alpha.\underline{a} \in S$ dan $\beta.\underline{b} \in S$. Sementara itu menuru a, maka $\alpha.\underline{a} + \beta.\underline{b} \in S$.

Selain dengan menggunakan **Proposisi 1.2.2**, dapat digunakan **Proposisi 1.2.3** untuk membuktikan suatu himpunan merupakan rub ruang vektor.

Contoh 1.2.3:

Himpunan $A = \{(x, y, z) \in R^3 | x = y = 0\}$ adalah himpunan bagian dari R^3. Dari **Contoh 1.2.2** telah dibuktikan bahwa himpunan ini tertutup terhadap penjumlahan vektor dan perkalian skalar. JAdi terbukti bahwa $A = \{(x, y, z) \in R^3 | x = y = 0\}$ adalah sub ruang vektor R^3.

Contoh 1.2.4:

Diberikan $B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \,|\, a = 2d, b = c \right\}$. Tunjukkan bahwa B adalah sub ruang vektor dari $M_{2\times 2}$ terhadap operasi standarnya.

E_mail: karyati@uny.ac.id

Bukti:

Himpunan $B=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}\,\middle|\, a=2d, b=c\right\}=\left\{\begin{bmatrix} 2d & c \\ c & d \end{bmatrix}\middle| c,d\in R\right\}$. Selanjutnya ambil sebarang elemen di B, sebut : $\begin{bmatrix} 2d & c \\ c & d \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2d' & c' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ dan diperoleh :

$\begin{bmatrix} 2d & c \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2d' & c' \\ c' & d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2d+2d' & c+c' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(d+d') & c+c' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$. Jelas bahwa hasil terakhir memenuhi syarat keanggotaan himpunan B. Dengan demikian B tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Ambil sebarang $\begin{bmatrix} 2d & c \\ c & d \end{bmatrix}\in B, \alpha\in R$ maka diperoleh:

$\alpha.\begin{bmatrix} 2d & c \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha.2d & \alpha.c \\ \alpha.c & \alpha.d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(\alpha.d) & \alpha.c \\ \alpha.c & \alpha.d \end{bmatrix}$. Dari hasil terakhir menunjukkan bahwa syarat keanggotaan himpunan B dipenuhi. Dengan demikian B tertutup terhadap operasi perkalian skalar.

Contoh 1.2.4:

Diberikan himpunan $C=\left\{ f\in F \,\middle|\, \frac{df}{dx}+f=\underline{0}\right\}$, dengan F adalah ruang vektor dari fungsi bernilai real dengan satu peubah x.

Untuk membuktikan tertutup terhadap penjumlahan vektor, ambil sebarang elemen $f,g\in C$. Sehingga dipenuhi $\frac{df}{dx}+f=\underline{0}$ dan $\frac{dg}{dx}+g=\underline{0}$. Selanjutnya dibuktikan