BAB I

RUANG VEKTOR UMUM

Dalam bab ini akan dipelajari tentang konsep ruang vektor umum, sub ruang vektor dan sifat-sifatnya. Pada pembicaraan ini, para mahasiswa dianggap sudah mengenal konsep dan sifat ruang vektor R^2 maupun R^3. Berdasarkan sifat – sifat ruang vektor R^2 dan R^3, diangkat menjadi aksioma-aksioma untuk ruang vektor umum .

1.1. Definisi dan Sifat Ruang Vektor

Berikut diberikan definisi ruang vektor umum, yang secara eksplisit didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.1.1 *Suatu ruang vektor V (atas bilangan real) adalah suatu himpunan V yang elemen-elemennya disebut vektor, bersama dengan dua operasi biner. Operasi yang pertama, disebut operasi penjumlahan vektor, yang membawa setiap pasangan vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ ke suatu vektor yang dinotasikan dengan $\underline{a}+\underline{b}$. Operasi ke dua disebut perkalian skalar , yang membawa setiap vektor $\underline{a}$ dan setiap skalar α ke suatu vektor yang dinotasikan $\alpha\underline{a}$. Kedua operasi tersebut harus memenuhi sifat sebagai berikut*:

1. $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ *untuk setiap pasangan vektor $\underline{a}$ dan $\underline{b}$ (**hukum komutatif dari penjumlahan vektor**)*
2. $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ *untuk setiap vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ dan $\underline{c}$ (**hukum asosiatif dari penjumlahan vektor**)*

E_mail: karyati@uny.ac.id

3. *Terdapat dengan tunggal vektor* $\underline{0}$ *, yang disebut vektor nol, sedemikian sehingga* $\underline{a}+\underline{0}=\underline{a}$ *, untuk setiap vektor* $\underline{a}$.
4. *Untuk setiap vektor* $\underline{a}$ *, terdapat dengan tunggal vektor (* $-\underline{a}$ *) sedemikian sehingga* $\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$.
5. $\alpha(\underline{a}+\underline{b})=\alpha\underline{a}+\alpha\underline{b}$ *untuk setiap bilangan real* α *dans etiap pasangan vektor* $\underline{a}$ *dan* $\underline{b}$.
6. $(\alpha+\beta)\underline{a}=\alpha\underline{a}+\beta\underline{a}$ *untuk setiap pasangan bilangan real* α *dan* β *, dan setiap vektor* $\underline{a}$.
7. $(\alpha\beta)\underline{a}=\alpha(\beta\underline{a})$ *untuk setiap pasangan bilangan real* α *dan* β *, dan setiap vektor* $\underline{a}$.
8. *Untuk setiap vektor* $\underline{a}$, $1\underline{a}=\underline{a}$.

Lebih jelasnya, operasi penjumlahan vektor di atas merupakan suatu pemetaan, yaitu:

$$+ \;:\; V\times V \rightarrow V$$

$$+ \;:\; (\underline{a},\underline{b}) \rightarrow \underline{a}+\underline{b}$$

Demikian halnya dengan operasi perkalian skalar juga merupakan pemetaan :

$$. \;:\; F\times V \rightarrow V$$

$$. \;:\; (\alpha,\underline{a}) \rightarrow \alpha\underline{a}$$

Berikut diberikan contoh-contoh ruang vektor:

Contoh 1.1.1

Himpunan R^2 merupakan ruang vektor jika operasi '+' dan '.' didefinisikan sebagai berikut:

$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ dan $\alpha.(x,y)=(\alpha x,\alpha y)$

Penjumlahan vektor tersebut bersifat tertutup, karena hasil penjumlahan dua vektornya juga merupakan anggota R^2. Demikian halnya perkalian skalarnya. Kita akan menunjukkan bahwa semua aksioma – aksioma pada definisi di atas dipenuhi. Jelas bahwa terhadap operasi penjumlahan vektor bersifat tertutup. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa aksioma 1 dipenuhi:

$$\begin{aligned}(x,y)+(x',y') &= (x+x',y+y') && \text{(menurut definisi penjumlahan)}\\ &= (x'+x,y'+y) && \text{(sifat komutatif bilangan real)}\\ &= (x',y')+(x,y) && \text{(definisi penjumlahan)}\end{aligned}$$

Jadi dipenuhi aksioma 1.

Ditunjukkan bahwa aksioma 2 dipenuhi:

$$\begin{aligned}\left((x,y)+(x',y')\right)+(x'',y'') &= (x+x',y+y')+(x'',y'') && \text{(definisi penjumlahan)}\\ &= \left((x+x')+x'',(y+y')+y''\right) && \text{(definisi penjumlahan)}\\ &= \left(x+(x'+x''),y+(y'+y'')\right) && \text{(sifat asosiatif bilangan real)}\\ &= (x,y)+(x'+x'',y'+y'') && \text{(definisi penjumalahan)}\\ &= (x,y)+\left((x',y')+(x'',y'')\right) && \text{(definisi penjumlahan)}\end{aligned}$$

Ditunjukkan bahwa aksioma 3 dipenuhi

Bentuk vektor nol, $\underline{0}=(0,0)$, sehingga diperoleh:

$(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(0,0)$

Jadi terdapat $\underline{0}=(0,0)\in R^2$ sehingga $(x,y)+(0,0)=(0,0)$

E_mail: karyati@uny.ac.id

Ditunjukkan bahwa aksioma 4 dipenuhi:

Ambil sebarang vektor $(x, y) \in R^2$, pasti dapat ditemukan $(-x, -y) \in R^2$ (bilangan real selalu mempunyai invers jumlah) sehingga berlaku

$(x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y))$ (definisi jumlah)

$= (0,0)$ (invers jumlah bilangan real)

$= \underline{0}$ (vektor nol menurut aksioma 3)

Aksioma 5 dipenuhi berdasarkan definisi perkalian skalarnya.

Selanjutnya ditunjukkan dipenuhi aksioma 6:

Ambil sebarang vektor $(x, y) \in R^2$ dan $\alpha, \beta \in R$, sehingga diperoleh

$(\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y)$ (definisi perkalian skalar)

$= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y)$ (sifat distributif bilangan real)

$= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y)$ (definisi penjumlahan vektor)

$= \alpha(x, y) + \beta(x, y)$ (definisi perkalian skalar)

Ditunjukkan dipenuhi aksioma 7:

Ambil sebarang vektor $(x, y) \in R^2$ dan $\alpha, \beta \in R$, sehingga diperoleh

$(\alpha\beta)(x, y) = ((\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y)$ (definisi perkalian skalar)

$= (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y))$ (sifat asosiatif bilangan real)

$= \alpha(\beta x, \beta y)$ (definisi perkalian skalar)

$= \alpha(\beta(x, y))$ (definisi perkalian skalar)

Ditunjukkan dipenuhi aksioma 8:

$1(x,y)=(1x,1y)=(x,y)$ (1 adalah elemen satuan pada bilangan real)

Contoh 1.1.2:

Himpunan R^3 adalah suatu ruang vektor terhadap operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar standar. (Bukti sejalan dengan Contoh 1.1)

Contoh 1.1.3:

Diberikan himpunan bagian R^3, $S=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x+y+z=0\}$. Didefinisikan penjumlahan vektor dan perkalian skalarnya adalah penjumlahan vektor dan perkalian skalar standart pada R^3. Sebelum menunjukkan berlakunya semua aksioma untuk ruang vektor, maka dibuktikan dahulu bahwa kedua operasi tersebut bersifat tertutup.

- Ambil sebarang vektor di S, yaitu: $\underline{a}=(x,y,z)$, $\underline{b}=(x',y',z')$. Jika dijumlahkan :

  $\underline{a}+\underline{b}=(x+x',y+y',z+z')$ (definisi penjumlahan)

  Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa $\underline{a}+\underline{b}\in S$ harus dibuktikan bahwa

  $(x+x')+(y+y')+(z+z')=0$

  $(x+x')+(y+y')+(z+z')=(x+y+z)+(x'+y'+z')$

  (sifat asosiatif dan komutatif bilangan real)

  $=0+0=0$ (karena $\underline{a},\underline{b}\in S$)

- Ambil sebarang vektor di S, yaitu: $\underline{a}=(x,y,z)$ dan $\alpha\in R$, sehingga:

E_mail: karyati@uny.ac.id