Jadi $(f+(-f)$ bernilai nol untuk setiap x, sehingga $(f+(-f)$ fungsi nol atau $(f+(-f)=\theta$.

- Aksioma 5

  Ambil $f,g\in F,\quad \alpha\in R$,

  $(\alpha(f+g))(x)=\alpha(f+g)(x)$

  $=\alpha(f(x)+g(x))$

  $=\alpha f(x)+\alpha g(x)$

  $=(\alpha f+\alpha g)(x)$

  Karena $(\alpha(f+g))(x)=(\alpha f+\alpha g)(x)$ untuk setiap x sehingga $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$

- Aksioma 6

  Ambil sebarang $f\in F,\quad \alpha,\beta\in R$ sehingga:

  $((\alpha+\beta)f)(x)=(\alpha+\beta).f(x)$

  $=\alpha f(x)+\beta f(x)$

  $=(\alpha f)(x)+(\beta f)(x)$

  Karena $((\alpha+\beta)f)(x)=(\alpha f)(x)+(\beta f)(x)$ untuk setiap x sehingga $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$.

- Aksioma 7

  Ambil sebarang $f\in F,\quad \alpha,\beta\in R$ sehingga:

  $((\alpha\beta)f)(x)=(\alpha\beta).f(x)$ (definisi perkalian skalar)

  $=\alpha(\beta.f(x))$ (sifat asosiatif bilangan real)

$= \alpha\left((\beta f)(x)\right)$ (definisi perkalian skalar)

$= \left(\alpha(\beta f)\right)(x)$ (definisi perkalian skalar)

Karena $((\alpha\beta)f)(x) = \left(\alpha(\beta f)\right)(x)$ untuk setiap x sehingga $(\alpha\beta)f = \alpha\left(\beta f\right)$.

- Aksioma 8

  $(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x)$, untuk setiap x sehingga $1.f = f$.

Berikut diberikan sifat-sifat yang selalu dimiliki oleh suatu ruang vektor. Sifat-sifat ini tidak diangkat menjadi aksioma pada ruang vektor karena dengan memenuhi kedelapan aksioma, maka sifat-sifat berikut pasti dipenuhi.

Lemma 1.1.2

Andaikan V adalah suatu ruang vektor, untuk setiap $\underline{v} \in V, \alpha \in R$ berlaku:

a. $0.\underline{v} = \underline{0}$

b. $\left(-1.\underline{v}\right) + \underline{v} = \underline{0}$

c. $\alpha.\underline{0} = \underline{0}$

Bukti:

a. $0.\underline{v} = \underline{0}$

Perlu diingat bahwa selalu berlaku: $\underline{v} = (1+0).\underline{v} = 1.\underline{v} + 0.\underline{v}$. Jika kedua sisi ditambahkan invers jumlah vektor $\underline{v}$, yaitu $(-\underline{v})$ maka diperoleh:

$-\underline{v}+\underline{v}=-\underline{v}+\underline{v}+0.\underline{v}$

$\underline{0}=\underline{0}+0.\underline{v}$

$\underline{0}=0.\underline{v}$

b. $(-1.\underline{v})+\underline{v}=\underline{0}$

$(-1.\underline{v})+\underline{v}=(-1.\underline{v})+1.\underline{v}=(-1+1)\underline{v}=0.\underline{v}=\underline{0}.$

c. $\alpha.\underline{0}=\underline{0}$

$\alpha.\underline{0}=\alpha.(0.\underline{0})=(\alpha.0).\underline{0}=0.\underline{0}=\underline{0}$

Latihan 1.1.1

1. Tentukan elemen nol pada himpunan –himpunan berikut relatif terhadap definisi operasi yang bersangkutan:
   a. Himpunan semua matriks ordo 2×4 terhadap operasi matriks standar
   b. Himpunan semua fungsi $\{f:[0,1]\to R \mid f \text{ adalah fungsi kontinu}\}$ terhadap operasi matriks standar
   c. Himpunan $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} \middle| a,b\in R\right\}$ terhadap operasi matriks standarnya.
   d. Himpunan R^3, terhadap operasi perkalian kalar standar, dan operasi penjumlahan yang disefinisikan sebagai berikut:

      $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x'+1,y+y'-1,z+z')$

2. Seperti dalam soal no. 1, carilah invers dari sebarang elemen pada himpunan yang bersangkutan.
3. Tunjukkan bahwa setiap himpunan berikut merupakan ruang vektor:
   a. Himpunan semua polinomial linear $P_4 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 | a,b,c,d,e \in R\}$ terhadap operasi jumlah dan perkalian standar polinomial.
   b. Himpunan semua matriks ordo 3×3 dengan entri –entrinya elemen bilangan real, terhadap operasi jumlah matriks dan perkalian skalar matriks standar.
   c. Himpunan $A = \{(x, y, z) \in R^3 | x = y = 0\}$ terhadap operasi jumlah dan perkalian skalar standar untuk R^3.
   d. Himpunan $F = \{a\cos\theta + b\sin\theta \, | a,b \in R\}$ terhadap operasi :

      $(a\cos\theta + b\sin\theta) + (a'\cos\theta + b'\sin\theta) = (a + a')\cos\theta + (b + b')\sin\theta$

      $\alpha.(a\cos\theta + b\sin\theta) = (\alpha.a)\cos\theta + (\alpha.b)\sin\theta$
   e. Himpunan $L = \left\{ f : R \to R \left| \frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0 \right. \right\}$ terhadap operasi standarnya.
   f. Himpunan semua bilangan real positif terhadap operasi:

      Penjumlahan : $a + b = a.b$ dan perkalian skalar $\alpha.a = a^{\alpha}$
   g. Himpunan bagian dari himpunan polinomial berderajat n, untuk n berhingga , yaitu $P_n' = \{p(x) \in P_n | p(-x) = p(x)\}$ terhadap operasi standar pada P_n.
4. Ujilah himpunan berikut apakah memmbentuk ruang vekto atau tidak, terhadap operasi yang didefinisikan kepadanya:

a. Himpunan semua R^3 dengan operasi jumlah didefinisikan sebagai berikut : $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ dan operasi perkalian skalar : $\alpha.(x,y,z)=(\alpha.x,(\alpha+1).y,\alpha.z)$.

b. Himpunan semua R^3 dengan operasi jumlah didefinisikan sebagai berikut : $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ dan operasi perkalian skalar : $\alpha.(x,y,z)=(3\alpha.x,2\alpha.y,\alpha.z)$.

c. Himpunan semua R^3 dengan operasi jumlah didefinisikan sebagai berikut : $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ dan operasi perkalian skalar : $\alpha.(x,y,z)=(0,0,0)$.

5. Andaikan V adalah ruang vektor dan $\varphi : V \to R$ sedemikian sehingga:

   $\varphi(\underline{a}+\underline{b})=\varphi(\underline{a})+\varphi(\underline{b}), \quad \forall \underline{a},\underline{b} \in R$

   $\varphi(\alpha.\underline{a})=\alpha.\varphi(\underline{a}), \quad \forall \underline{a} \in R, \alpha \in R$

   Tunjukkan bahwa himpunan $N=\{\underline{a}\in V \mid \varphi(\underline{a})=0\}$ membentuk ruang vektor terhadap operasi tersebut.

6. Andaikan V adalah ruang vektor dan S adalah himpunan bagian tak kosong dengan $s \in S$ elemen tertentu. Selanjutnya didefinisikan $e_S : F(S,V) \to V$ dengan $e_S(f)=f(s)$ dan $F(S,V)$ adalah himpunan semua fungsi dari S ke V yang membentuk suatu ruang vektor terhadap operasi standarnya.

   Tunjukkan bahwa $K=\{f \in F(S,V) \mid e_S(f)=\underline{0}\}$ membentuk ruang vektor terhadap operasi yang didefinisikan pada ruang vektor $F(S,V)$.

7. Diberikan V, W suatu ruang vektor. Dibentuk suatu himpunan $V \times W = \{(\underline{a}, \underline{b}) | \underline{a} \in V, \underline{b} \in W\}$. Pada himpunan tersebut didefinisikan operasi jumlah dan perkalian skalar sebagai berikut:

   $(\underline{a}, \underline{b}) + (\underline{a}', \underline{b}') = (\underline{a} + \underline{a}', \underline{b} + \underline{b}')$ dan $\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = (\alpha.\underline{a}, \alpha.\underline{b})$

8. Andaikan V adalah ruang vektor dan S adalah himpunan bagian tak kosong dengan $s, t \in S$. Didefinisikan : $\varphi : F(S,V) \to V \times V$ dengan $\varphi(f) = (f(s), f(t))$. Tunjukkan bahwa himpunan $N = \{f \in F(S,V) | \varphi(f) = \underline{0}\}$ membentuk ruang vektor terhadap operasi yang didefinisikan pada $F(S,V)$.

9. Andaikan ℓ_0 adalah himpunan semua barisan bilangan real. Tunjukkan ℓ_0 membentuk ruang vektor terhadap operasi standar untuk penjumlahan barisan dan perkalian bilangan real pada barisan.

10. Andaikan S himpunan tak kosong , dan $F(S)$ adalah ruang vektor fungsi bernilai real pada S. Jika $A, B \subseteq S$ tunjukkan bahwa : $F(S, A) \cap F(S, B) = F(S, A \cup B)$. Jika $A \subseteq B$, tunjukkan bahwa $F(S, A)$ memuat $F(S, B)$.

11. Andaikan C himpunan semua fungsi $y = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, yang memenuhi persamaan deferensial $y'' - y' - 2y = 0$. Tunjukkan bahwa C membentuk ruang vektor.