$\alpha \underline{a} = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$. Selanjutnya dibuktikan $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S$ atau dibuktikan $\alpha x + \alpha y + \alpha z = 0$. Berdasarkan sifat bilangan real diperoleh hubungan:

$\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x + y + z) = \alpha.0 = 0$

Jadi terbukti bahwa kedua operasi tersebut bersifat tertutup, sehingga tinggal membuktikan bahwa seluruh aksioma untuk ruang vektor dipenuhi.

- Aksioma 1,2 dipenuhi , sebab untuk setiap elemen di S merupakan elemen di R^3, sehingga bersifat komutatif dan asosiatif
- Aksioma 3 dipenuhi, sebab $\underline{0} = (0,0,0) \in S$ yang sama dengan elemen nol di R^3. Dengan demikian senantiasa dipenuhi $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$, untuk setiap vektor $\underline{a} \in S$.
- Aksioma 4 dipenuhi:

  Ambil $\underline{a} = (x, y, z) \in S$, maka $-\underline{a} \in S$ sebab $(-x) + (-y) + (-z) = -(x + y + z) = 0$.
- Aksioma 5,6,7,8 dipenuhi, sebab untuk setiap elemen di S merupakan elemen di R^3.

Contoh 1.1.4:

Diberikan himpunan $P_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a, b, c, d \in R\}$. Pada himpunan tersebut didefinisikan penjumlahan sebagai berikut:

$$(a + bx + cx^2 + dx^3) + (a' + b'x + c'x^2 + d'x^3) = (a + a') + (b + b')x + (c + c')x^2 + (d + d')x^3$$

dan perkalian skalar sebagai berikut:

$$\alpha\ (a + bx + cx^2 + dx^3) = (\alpha a) + (\alpha b)x + (\alpha c)x^2 + (\alpha d)x^3$$

Himpunan P_3 terhadap operasi tersebut membentuk ruang vektor. Jelas bahwa kedua operasi tersebut bersifat tertutup, sebab koefisien-koefisiennya merupakan anggota bilangan real. Berdasarkan sifatnya, maka dia bersifat tertutup. Dengan demikian baik jumlah maupunperkaliannya juga anggota bilangan real, sehingga membentuk elemen di P_3.

Selanjutnya tinggal menunjukkan bahwa kedelapan aksioma dipenuhi:

- Aksioma 1:

$$(a+bx+cx^2+dx^3)\ +\ (a'+b'x+c'x^2+d'x^3)=(a+a')+(b+b')x+(c+c')x^2+(d+d')x^3$$

$$=(a'+a)+(b'+b)x+(c'+c)x^2+(d'+d)x^3 \qquad \text{(sifat komutatif bilangan real)}$$

$$=(a'+b'x+c'x^2+d'x^3)\ +\ (a+bx+cx^2+dx^3) \qquad \text{(definisi penjumlahannya)}$$

- Aksioma 2:

$$((a+bx+cx^2+dx^3)+(a'+b'x+c'x^2+d'x^3))+(a''+b''x+c''x^2+d''x^3)$$

$$=((a+a')+(b+b')x+(c+c')x^2+(d+d')x^3)+(a''+b''x+c''x^2+d''x^3)$$

$$=\left((a+a')+a''\right)+\left((b+b')+b''\right)x+\left((c+c')+c''\right)x^2+\left((d+d')+d''\right)x^3$$

- Aksioma 3:

Bentuk $\underline{0}=0+0x+0x^2+0x^3$, sehingga untuk sebarang $a+bx+cx^2+dx^3$ berlaku: $(0+0x+0x^2+0x^3)+\ (a+bx+cx^2+dx^3)=$

$$(0+a)+(0+b)x+(0+c)x^2+(0+d)x^3$$

$$=a+bx+cx^2+dx^3$$

- Aksioma 4:

  Untuk sebarang $a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3$, maka $(-a) + (-b)x + (-c)x^2 + (-d)x^3 \in P_3$

  sehingga:

  $(a + bx + cx^2 + dx^3) + ((-a) + (-b)x + (-c)x^2 + (-d)x^3)$

  $= (a + (-a)) + (b + (-b))x + (c + (-c))x^2 + (d + (-d))x^3$

  $= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = \underline{0}$

- Aksioma 5:

  Ambil $(a + bx + cx^2 + dx^3)$, $(a' + b'x + c'x^2 + d'x^3) \in P_3$, sehingga:

  $\alpha\,((a + bx + cx^2 + dx^3) + (a' + b'x + c'x^2 + d'x^3))$

  $= \alpha\,((a + a') + (b + b')x + (c + c')x^2 + (d + d')x^3)$

  $= \alpha(a + a') + \alpha(b + b')x + \alpha(c + c')x^2 + \alpha(d + d')x^3$

  $= (\alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3) + (\alpha a' + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3)$

  $= \alpha\,(a + bx + cx^2 + dx^3) + \alpha\,(a' + b'x + c'x^2 + d'x^3)$

- Aksioma 6:

  Ambil $(a + bx + cx^2 + dx^3) \in P_3$, sehingga:

  $(\alpha + \beta)\,(a + bx + cx^2 + dx^3) = (\alpha + \beta)a + (\alpha + \beta)bx + (\alpha + \beta)cx^2 + (\alpha + \beta)dx^3$

  $= (\alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3) + (\beta a + \beta bx + \beta\alpha cx^2 + \beta dx^3)$

  $= \alpha\,(a + bx + cx^2 + dx^3) + \beta\,(a + bx + cx^2 + dx^3)$

- Aksioma 7:

  Ambil $(a + bx + cx^2 + dx^3) \in P_3$, sehingga:

  $(\alpha\beta)\ (a + bx + cx^2 + dx^3) = (\alpha\beta)a + (\alpha\beta)bx + (\alpha\beta)cx^2 + (\alpha\beta)dx^3$

  $= \alpha(\beta a) + \alpha(\beta b)x + \alpha(\beta c)x^2 + \alpha(\beta d)x^3$

  $= \alpha((\beta a) + (\beta b)x + (\beta c)x^2 + (\beta d)x^3)$

  $= \alpha(\beta(a + bx + cx^2 + dx^3))$

- Aksioma 8:

  Ambil $(a + bx + cx^2 + dx^3) \in P_3$, sehingga:

  $1\,(a + bx + cx^2 + dx^3) = 1a + 1bx + 1cx^2 + 1dx^3 = (a + bx + cx^2 + dx^3)$

Contoh 1.1.5

Himpunan semua fungsi bernilai real dengan satu peubah real, $F = \{ f \mid f : R \to R \}$, merupakan ruang vektor terhadap operasi:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ dan } (\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$$

Kedua operasi bersifat tertutup, sebab keduanya menghasilkan fungsi bernilai real dengan satu peubah real. Selanjutnya tinggal ditunjukkan bahwa kedelapan aksioma ruang vektor dipenuhi kedua operasi tersebut.

- Aksioma 1:

  Ambil sebarang $f, g \in F$, sehingga dibuktikan bahwa $f + g = g + f$.

  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (definisi penjumlahan)

$= g(x) + f(x)$ (sifat komutatif bilangan real)

$= (g + f)(x)$ (definisi penjumlahan)

Karena $(f + g)(x) = (g + f)(x)$, untuk setiap x maka $f + g = g + f$.

- Aksioma 2

Ambil sebarang $f, g, h \in F$, sehingga dibuktikan bahwa $(f + g) + h = f + (g + h)$.

$$
\begin{aligned}
((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + (h)(x) \\
&= (f(x) + g(x)) + h(x) \\
&= f(x) + (g(x) + h(x)) \\
&= f(x) + (g + h)(x) \\
&= (f + (g + h))(x)
\end{aligned}
$$

Karena $((f + g) + h)(x) = (f + (g + h))(x)$ untuk setiap x maka

$(f + g) + h = f + (g + h)$

- Aksioma 3

Bentuk $\theta(x) = 0, \forall x \in R$, maka θ adalah fungsi nol yang merupakan anggota F dan diperoleh: $(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$.

Jadi terdapat fungsi nol θ sehingga $f + \theta = f$

- Aksioma 4

Ambil $f \in F$, $(-f)(x) = -1.f(x)$, sehingga $-f \in F$ dan diperoleh:

$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$