JAWABAN UJIAN SISIPAN I

1. Diketahui : V ruang vektor, $E \subseteq U$,U sub ruang vektor V
   Dibutktikan : $Span[E] \subseteq U$
   Bukti:
   Misal $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Ambil sebarang $x \in Span[E]$, maka $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ untuk $\alpha_i \in R$. Karena U sub ruang vektor V, maka $\alpha_i x_i \in U$ yang juga berakibat $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \in U$.

2. Bentuk : $ax^2 + b(1 + x^2) = 0 + 0x + 0x^2$
   $b + (a+b)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$
   Persamaan di atas dipenuhi untuk $a = 0,\ b = 0$. Sehingga vektor-vektor tersebut bebas linear.
   Jelas bahwa $Span[E] \subseteq P_2$. Selanjutnya dibuktikan $P_2 \subseteq Span[E]$
   Ambil sebarang $a + bx + cx^2 \in P_2$, selanjutnya dicari $\alpha, \beta \in R$ sedemikian sehingga dipenuhi : $a + bx + cx^2 = \alpha x^2 + \beta(1 + x^2)$
   $a + bx + cx^2 = \beta + (\alpha + \beta)x^2$
   Diperoleh : $\beta = a$, $\alpha = c - a$. Penyelesaian ini hanya konsisten ketika $b = 0$, dengan demikian tidak semua elermen di P_2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\{x^2, 1 + x^2\}$.

   Cara 2:
   Telah dibuktikan $E = \{x^2, 1 + x^2\}$ bebas linear. Sehingga $Span[E]$ ruang vektor berdimensi 2. Diketahui bahwa P_2 berdimensi 3. Menurut sifatnya $\{x^2, 1 + x^2\} \subseteq P_2$ tidak mungkin merentang P_2, dengan kata lain $Span[E] \neq P_2$.

   Contoh: Semua vektor $a + bx + cx^2 \in P_2$ dengan $b = 0$ bukan elemen di $Span[E]$

3. Untuk a dan d : Himpunan vektor dengan banyak elemen lebih besar dari dimensinya dijamin bergantung linear, sehingga bukan basis
   Untuk b dan c : Himpunan vektor dengan banyak elemen lebih kecil dari dimensinya dijamin tidak merentang , sehingga bukan basis

4. Dengan menggunakan OBE:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -9 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 11 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -13 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -9 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 14 & 21 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{7}R_2,\ \frac{1}{6}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -9 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Jawaban Ujian Sisipan I_Karyati
E_mail: karyati@uny.ac.id

$$\xrightarrow{R_3-R_2}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -9 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13/3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+3R_2]{-3/13 R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2-3R_3]{R_1-4R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Sehingga penyelesaian SPL homogen di atas adalah:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad t \in R$$

Jadi basis untuk ruang penyelesaian SPL homogennya adalah: $\{(3,-2,1,0)\}$

5. Basis dari ruang kolom:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -9 & -4 & 3 \\ -5 & 11 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+3R_1 \\ R_3+9R_1 \\ R_4+5R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 14 & 12 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \times R4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-7R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 62 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/62 R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

JAdi basis ruang yang dibangun oleh kolom-kolom matriks koefisien tersebut adalah: $\{(1,2,1),(0,1,-8),(0,0,1)\}$

6. Himpunan $U = \{f \in F(S,V) \mid f(s) \in W\} \subseteq F(S,V)$, dengan $F(S,V)$ ruang vektor terhadap operasi standart yang didefinisikan sebagai berikut:
   $f+g$ didefinisikan $(f+g)(s) = f(s)+g(s)$
   αf didefinisikan $(\alpha f)(s) = \alpha f(s)$
   Sehingga untuk membuktikan $U = \{f \in F(S,V) \mid f(s) \in W\} \subseteq F(S,V)$ sebagai ruang vektor cukup dibuktikan U merupakan sub ruang vektor:
   - Ambil $f,g \in U$, sehingga $f(s), g(s) \in W$. Diketahui W sub ruang vektor, maka $f(s)+g(s) \in W$ atau $(f+g)(s) \in W$. Dengan demikian $(f+g) \in U$
   - Ambil $\alpha \in U$ dan $f \in U$, sehingga $f(s) \in W$. Diketahui W sub ruang vektor, maka $\alpha f(s) \in W$ atau $(\alpha f)(s) \in W$. Dengan demikian $\alpha f \in U$