DIRECT PRODUCTS

"Di susun untuk memenuhi tugas kuliah Aljabar Abstrak Dosen pengampu: Dr. Agus Maman Abadi"

Di susun oleh klpk IX:

Harinda Nurril F	**(10709251035)**
M.Supratman	**(10709251036)**
Wahyu Widiyanti	**(10709251038)**

MAGISTER PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2011

Teorema 2.9.4

Jika G adalah grup dengan subgrup normal $N_1 , N_2 , N_3 , \dots , N_n$. Didefinisikan pemetaan $\psi\ (a_1 ,\ a_2 , \dots ,\ a_n) =\ a_1\, a_2 \dots\ a_n$ adalah isomorpik dari $N_1\ x\ N_2\ x\ N_3\ x \dots x\ N_n$ (hasil kali langsung luar) ke G jika dan hanya jika G adalah hasil kali langsung dalam dari $N_1 , N_2 , N_3 , \dots , N_n$

Pembuktian :

Didefinisikan pemetaan $\psi :\ N_1\ x\ N_2\ x\ N_3\ x \dots x\ N_n\ \longrightarrow G$ oleh $\psi\ (a_1 ,\ a_2 , \dots ,\ a_n) = a_1\, a_2 \dots\ a_n$

Karena setiap elemen a dalam G mempunyai sebuah representasi $a =\ a_1\, a_2 \dots\ a_n$ dengan $a_i \in N_i$, maka ψ adalah suatu pemetaan onto.

Pemetaan ψ adalah 1-1 sebab jika $\psi\ (a_1 ,\ a_2 , \dots ,\ a_n) =\ \psi\ (b_1 ,\ b_2 , \dots ,\ b_n)$ maka oleh definisi pemetaan ψ , $(a_1 ,\ a_2 , \dots ,\ a_n) = (b_1 ,\ b_2 , \dots ,\ b_n)$. Selanjutnya, menurut ketunggalan representasi dari suatu elemen dalam bentuk ini diperoleh $a_1 =\ b_1 , a_2 = b_2 , \dots , a_n =\ b_n$. Jadi, ψ suatu pemetaan 1-1. Kita tinggal menunjukkan bahwa ψ suatu homomorpisme

$$\begin{aligned}\psi\ ((a_1 ,\ a_2 , \dots ,\ a_n)(b_1 ,\ b_2 , \dots ,\ b_n)) &= \psi\ ((a_1b_1 ,\ a_2b_2 , \dots ,\ a_nb_n)) \\ &= (a_1b_1)\ (a_2b_2) \dots\ (a_nb_n) \\ &= a_1b_1 \,.\, a_2b_2 \,. \dots \,.\ a_nb_n\end{aligned}$$

Menurut Lemma 2.9.3 , $b_1 \in N_1$ komutatif dengan $a_i ,\ b_i \in N_i$ untuk $i > 1$

Sehingga kita dapat menukarkan b_1 dengan elemen – elemen yang ada di kanannya dan diperoleh $a_1b_1 \,.\, a_2b_2 \,. \dots .\ a_nb_n =\ a_1a_2b_2 \dots a_nb_nb_1$. Demikian kita ulangi untuk $b_2 ,\ b_3 , \dots ,\ b_n$ sehingga diperoleh, $a_1b_1 \,.\, a_2b_2 \,. \dots \,.\ a_nb_n = (a_1a_2\ \dots\ a_n)(b_1b_2\ \dots\ b_n)$

Jadi, $$\begin{aligned}\psi\ ((a_1 ,\ a_2 , \dots ,\ a_n)(b_1 ,\ b_2 , \dots ,\ b_n)) &= a_1b_1 \,.\, a_2b_2 \,. \dots \,.\ a_nb_n \\ &= (a_1a_2\ \dots\ a_n)(b_1b_2\ \dots\ b_n) \\ &= \psi\ (a_1 ,\ a_2 , \dots ,\ a_n)\ \psi\ (b_1 ,\ b_2 , \dots ,\ b_n)\end{aligned}$$

Sehingga ψ adalah suatu homomorpisme

Dengan kata lain ψ adalah suatu isomorpik. Dapat disimpulkan bahwa G merupakan hasil kali langsung dalam dari $N_1 , N_2 , N_3 , \dots , N_n$ kemudian ψ adalah onto dan 1-1.

Corollary

Jika G adalah grup dengan subgrup normal N_1 dan N_2 . Maka G merupakan hasil kali langsung dalam dari N_1 dan N_2 jika dan hanya jika G = N_1N_2 dan $N_1\ \cap\ N_2\ =\ (e)$

Pembuktian

Didefinisikan pemetaan $\psi\ :\ N_1\ x\ N_2\ \longrightarrow\ G$, oleh $\psi\left((a_1\ ,\ a_2)\right)\ =\ a_1\, a_2$

N_1 x $N_2\ =\ \{(a_1\ ,\ a_2)\ |\ a_i\ \in\ N_i\ ;\ i\ =\ 1\ ,\ 2\}$

Pemetaan ψ adalah 1-1 sebab jika $\psi\,(a_1\,,\ a_2) = \psi\,(b_1\,,\ b_2)$ maka oleh definisi pemetaan $\psi\,,\ (a_1\,,\ a_2) = (b_1\,,\ b_2)$. Selanjutnya, menurut ketunggalan representasi dari suatu elemen dalam bentuk ini diperoleh $a_1 = b_1$ dan $a_2 = b_2$. Jadi, ψ suatu pemetaan 1-1. Kita tinggal menunjukkan bahwa ψ suatu homomorpisme

$\psi\,((a_1\,,\ a_2)(b_1\,,\ b_2))$ = $\psi\,((a_1 b_1\,,\ a_2 b_2))$

= $(a_1 b_1)\ (a_2 b_2)$

= $a_1 b_1\,.\,a_2 b_2$

Menurut Lemma 2.9.3 , $b_1 \epsilon\, N_1$ komutatif dengan $a_i\,,\ b_i\ \in\ N_i$ untuk $i > 1$

Sehingga kita dapat menukarkan b_1 dengan elemen – elemen yang ada di kanannya dan diperoleh $a_1 b_1\,.\,a_2 b_2\ =\ a_1 a_2 b_2\,.\ b_1$. Demikian kita ulangi untuk b_2 , $a_1 b_1\,.\,a_2 b_2\ =$ $a_1 a_2\ .\ b_1 b_2$ sehingga diperoleh, $a_1 b_1\,.\,a_2 b_2$ = $(a_1 a_2)(b_1 b_2)$

$\psi\,((a_1\,,\ a_2)(a_2\,,\ a_1))$ = $a_1 b_1\,.\,a_2 b_2$

= $(a_1 a_2)(b_1 b_2)$

= $\psi\,(a_1\,,\ a_2)\ \psi\,(b_1\,,\ b_2)$

Sehingga ψ adalah suatu homomorpisme , dengan kata lain ψ adalah suatu isomorpik.

Menurut Lemma 2.9.2 , jika $n_1\ \in\ N_1$ dan $n_2\ \in\ N_2$ kemudian berdasarkan elemen $a = n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}$

1) Jika $N_1 \lhd\ G$

   Maka $a = n_1 n_2 n_1^{-1}\ \in\ N_1$

   Karena $n_2\ \in\ N_1$ maka $a = n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}\ \in\ N_1$

2) Jika $N_2 \lhd\ G$

   Maka $a = n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}\ \in\ N_2$

   Karena $n_1\ \in\ N_2$ maka $a = n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1}\ \in\ N_2$

Sehingga $a\ \in\ N_1\ \cap\ N_2\ =\ (e)$ atau dapat dikatakan $n_1 n_2 n_1^{-1} n_2^{-1} =\ (e)$.

Soal

1. Jika G_1 dan G_2 dua grup, buktikan bahwa G_1 x $G_2 \approx G_2$ x G_1

<u>Jawab</u> :

Apabila G_1 x $G_2 = \{(a_1 , a_2) \mid a_i \in G_i ; i = 1 , 2\}$

G_2 x $G_1 = \{(a_2 , a_1) \mid a_i \in G_i ; i = 1 , 2\}$

Didefinisikan pemetaan $\psi : G_1$ x $G_2 \longrightarrow G_2$ x G_1 oleh $\psi\left((a_1 , a_2)\right) = a_1, a_2$

Pemetaan ψ adalah 1-1 sebab jika $\psi\,(a_1 , a_2) = \psi\,(a_2 , a_1)$ maka oleh definisi pemetaan ψ , $(a_1 , a_2) = (a_2 , a_1)$. Selanjutnya, menurut ketunggalan representasi dari suatu elemen dalam bentuk ini diperoleh $a_1 = a_2$ dan $a_2 = a_1$. Jadi, ψ suatu pemetaan 1-1. Kita tinggal menunjukkan bahwa ψ suatu homomorpisme

$\psi\,((a_1 , a_2)(a_2 , a_1))$ = $\psi\,((a_1a_2 , a_2a_1))$

= $(a_1a_2)\,(a_2a_1)$

= $a_1a_2 . a_2a_1$

Menurut Lemma 2.9.3 , $a_1 \epsilon\, G_1$ komutatif dengan $a_i \epsilon\, G_i$

Sehingga kita dapat menukarkan a_1 dengan elemen – elemen yang ada di kanannya dan diperoleh $a_1a_2 . a_2a_1 = a_2a_2a_1 . a_1$. Demikian kita ulangi untuk a_2 , $a_1a_2 . a_2a_1 = a_2a_1 . a_1a_2$ sehingga diperoleh, $a_1a_2 . a_2a_1$ = $(a_2a_1)(a_1a_2)$

$\psi\,((a_1 , a_2)(a_2 , a_1))$ = $a_1a_2 . a_2a_1$

= $(a_2a_1)(a_1a_2)$

= $\psi\,(a_1 , a_2)\,\psi\,(a_2 , a_1)$

Sehingga ψ adalah suatu homomorpisme , dengan kata lain ψ adalah suatu isomorpik. (terbukti)

2. Misalkan G suatu grup , A = G x G , T ⊂ A dan T = { (g,g) | g ∈ G } Buktikan bahwa :
   a. T ≈ G
   b. T ⊲ G jika dan hanya jika G abelian

   <u>Jawab</u> :

   a. Untuk membuktikan bahwa T merupakan grup, maka harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa T merupakan subgrup dari A

Diberikan $a, b \in G$ dimana G merupakan suatu grup , menurut definisi pada halaman 93 (Buku Herstein) Dengan $a = a_1 a_2 \dots a_n$ dan $b = b_2 \dots b_n$ diperoleh ,

$((a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n)) = ((a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n))$

$= (a_1b_1)(a_2b_2) \dots (a_nb_n)$

$= (a_1b_1 . a_2b_2 . \dots . a_nb_n) \in$ T

$(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = (a_1{}^{-1}, a_2{}^{-1}, \dots, a_n{}^{-1}) \in$ T

$(b_1, b_2, \dots, b_n)^{-1} = (b_1{}^{-1}, b_2{}^{-1}, \dots, b_n{}^{-1}) \in$ T

Jadi, T merupakan subgrup dari A

Didefinisikan pemetaan $\psi : G \longrightarrow T$ dan $g \longrightarrow (g, g)$ (rumus)

Karena setiap elemen g dalam G mempunyai sebuah representasi $g = g_1 g_2 \dots g_n$ dengan $g_i \epsilon G$, maka ψ adalah suatu pemetaan onto.

Kita tinggal menunjukkan bahwa ψ suatu homomorpisme,

Diberikan $, b \in G$, dengan $a = a_1 a_2 \dots a_n$ dan $b = b_2 \dots b_n$ diperoleh

$\psi((a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n)) = \psi((a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n))$

$= (a_1b_1)(a_2b_2) \dots (a_nb_n)$

$= a_1b_1 . a_2b_2 . \dots . a_nb_n$

Menurut Lemma 2.9.3 , $b_1 \epsilon N_1$ komutatif dengan a_i, $b_i \epsilon G$ untuk $i > 1$

Sehingga kita dapat menukarkan b_1 dengan elemen – elemen yang ada di kanannya dan diperoleh $a_1b_1 . a_2b_2 . \dots . a_nb_n = a_1a_2b_2 \dots a_nb_nb_1$. Demikian kita ulangi untuk $b_2, b_3, \dots, b_n$ sehingga diperoleh, $a_1b_1 . a_2b_2 . \dots . a_nb_n = (a_1a_2 \dots a_n)(b_1b_2 \dots b_n)$

$\psi((a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n)) = a_1b_1 . a_2b_2 . \dots . a_nb_n$

$= (a_1a_2 \dots a_n)(b_1b_2 \dots b_n)$

$= \psi(a_1, a_2, \dots, a_n)\, \psi(b_1, b_2, \dots, b_n)$

Sehingga ψ adalah suatu homomorpisme, dengan kata lain ψ adalah suatu isomorpik.

Jadi, terbukti bahwa D merupakan isomorpik dari G

b. A = G x G = { (g,g) | g ∈ G }

$((g_1, g_2, \dots, g_n)(g_1, g_2, \dots, g_n)) = ((g_1g_1, g_2g_2, \dots, g_ng_n))$

$= (g_1g_1)(g_2g_2) \dots (g_ng_n)$

$= (g_1g_1 . g_2g_2 . \dots . g_ng_n)$