

Makalah Teori Persandian

Decoding Single Error Correcting Codes

Dosen Pengampu : Dr. Agus Maman Abadi



Oleh :

Septiana Nurohmah	(08305141002)
Ayu Luhur Yusdiana Y	(08305141028)
Muhammad Alex Sandra	(08305141036)
David Arianto	(08305141037)
Beni Iskandar	(08305141041)

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**

2011

I. PENDAHULUAN

Dalam proses pengiriman informasi, hal yang paling penting adalah bagaimana cara mengirimkan suatu informasi dari satu tempat ke tempat lain, dimana informasi yang diterima sesuai dengan informasi yang dikirimkan. Akan tetapi, masalah yang sering timbul adalah adanya gangguan pada saat proses pengiriman. Pada saat vektor terkirim terjadi gangguan, vektor penerima mengalami perubahan dari bentuk semula, yang berarti terjadi error akibat gangguan tersebut. Untuk itu sangat diperlukan pemahaman terhadap metode untuk mendeteksi dan memperbaiki error.

Pada makalah ini akan dibahas salah satu prosedur untuk mendeteksi error yang dikhususkan untuk error tunggal per codeword. Dengan terdeteksi adanya error maka perbaikan bisa dilakukan sehingga informasi yang diterima sesuai dengan yang dikirimkan, atau dengan kata lain informasi yang diterima adalah bebas error.

II. PEMBAHASAN

Decoding Single –Error Correcting Codes

Kode linier seperti yang terdapat pada *Hamming Codes* adalah contoh tipe yang paling sederhana dari penerjemahan suatu kode. Di bagian ini kita akan menunjukkan salah satu contoh prosedur perbaikan untuk kode-kode linier yang hanya mempunyai satu error per codeword. Di mulai dari pengenalan konsep *error vector*.

Contoh :

Misalkan $c=(0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1)$ adalah kode biner codeword yang akan dikirim dan $r=(1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$ adalah kode yang diterima. Karena kode yang dikirim tidak sama dengan kode yang diterima, maka terjadi error dalam proses pengiriman codeword. Perubahan kode yang diterima dengan yang dikirim disebut vektor error (e), dengan

$$r = c + e$$

$$e = r - c = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1) - (0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1) = (1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

Misalkan H sebuah matrik *parity-check* untuk kode linier C . Asumsikan bahwa $w(e) \leq 1$ untuk setiap vector error yang diketahui di channel sehingga error yang terjadi dapat dideteksi. Misalkan $c \in C$ merupakan kode yang dikirim dan r kode yang diterima, kita dapat menulis $r = c + e$. Maka dapat dihitung :

$$Hr^T = H(c + e)^T = Hc^T + He^T = He^T$$

Dengan $Hc^T = 0$. Jika $e = 0$, maka $He^T = 0$. Jika $Hr^T = 0$, kita bisa terima r sebagai kode yang akan dikirim. Jika $e \neq 0$, maka e berisi satu koordinat tidak nol. Misalkan saja ada koordinat ke- i yang nilainya α . Kemudian $He^T = \alpha h_i$,

$$[h_1 \ h_2 \ h_3 \ \dots \ h_i \ h_{i+1} \ \dots \ h_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha h_i$$

dengan h_i adalah kolom ke- i dari matrik H .

Secara umum algoritma untuk decoding single-error linier codes adalah :

Misalkan H sebuah matrik parity-check, dan r adalah vector yang diterima.

1. Hitung $S^T = Hr^T$
2. Jika $S^T = 0$, maka kita dapatkan bahwa r adalah kode yang diterima yang artinya tidak terjadi error
3. Jika $S^T \neq 0$, lalu bandingkan S^T dengan kolom-kolom yang ada di H .
4. Jika ada beberapa kolom ke- i sehingga $S^T = \alpha h_i$, maka e adalah n -tupel dengan α pada posisi ke- i dan 0 's pada bagian yang lain; perbaiki r ke $c = r - e$.
5. Selain itu, error yang terjadi lebih dari satu.

Contoh 1:

Diketahui single-error-correcting kode C atas Z_2 yang memiliki matrik parity-check

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } r = (0 \ 1 \ 1 \ 1)$$

Koreksi apakah terjadi error dalam pembacaan kode!

Jawab :

$$r=(0\ 1\ 1\ 1) \text{ maka } r^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S^T = Hr^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Karena $S^T=0$, maka tidak terjadi error sehingga tidak perlu dikoreksi.

Contoh 2:

Diketahui single-error-correcting kode C atas Z_2 yang memiliki matrix parity-check

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan codeword $c = (110100)$ adalah kode yang dikirimkan dan terdeteksi bahwa ada error, $e=(000010)$. Deteksilah pada bit ke-berapa letak kesalahannya!

Jawab :

$$r=c+e = (110100) + (000010) = (110110)$$

$$r=(110110) \text{ maka } r^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S^T = Hr^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena $S^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$ berarti terjadi error. Elemen pada S^T sama dengan elemen pada kolom

kelima matrik H maka dapat disimpulkan bahwa error terjadi pada bit yang kelima dengan vektor error $e (000010)$. Pada Z_2 berlaku $c=r-e=r+e$

Contoh 3:

Diketahui single-error-correcting kode C atas Z_5 yang memiliki matrik parity check

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Misalkan codeword $c=(4430010)$ dipancarkan dan terjadi error dengan $e=(0003000)$. Koreksilah dimana letak kesalahannya!

Jawab :

$$r=c+e = (4430010) + (0003000) = (4433010)$$

$$r=(4433010) \text{ maka } r^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S^T = Hr^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$S^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah elemen pada kolom keempat matrik H maka dapat disimpulkan bahwa

error terjadi pada bit keempat dengan vektor error $e=(0003000)$. Angka 3 di depan matriks

$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ berarti , maka vektor error $e = (0003000)$.Codeword $c=r-e$

Ada kasus khusus untuk **Haming Code** biner. Misalkan H adalah matrik parity check dan tidak ada kolom dari H yang semua elemennya nol, maka kolom i pada H merepresentasikan suatu bilangan bulat i. Sehingga kita tidak perlu untuk mencocokkan nilai

S^T dengan setiap kolom H. Bilangan bulat yang direpresentasikan oleh S^T tersebut sudah menunjukkan letak kesalahannya.

Contoh 4 :

Diketahui Hamming Codes biner dengan matrik parity check

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setiap kolom i pada H merepresentasikan bilangan bulat i.

Misalkan pada kolom ke 3 matrik H :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 3$$

Misalkan codeword $c = (0111100)$ dipancarkan dan dideteksi ada error dengan $e = (0000010)$.

$$r = c + e = (0111100) + (0000010) = (0111110)$$

$$r = (0111110) \text{ maka } r^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S^T = Hr^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bilangan bulat yang direpresentasikan oleh $S^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 6$. Dapat

disimpulkan kesalahan terjadi pada bit keenam. Nilai α nya adalah 1 maka vector errornya adalah (0000010)

Jika menggunakan cara seperti contoh sebelumnya, yaitu dengan mencocokkan S^T dengan setiap kolom pada H maka diperoleh kesamaan antara elemen S^T dengan elemen pada

kolom keenam matrik H. Dapat disimpulkan bahwa kesalahan terjadi pada bit keenam. Ternyata didapat hasil yang sama.

KESIMPULAN

Pada saat vektor terkirim terjadi gangguan, vektor penerima mengalami perubahan dari bentuk semula, yang berarti terjadi error akibat gangguan tersebut. Untuk mengetahui ada atau tidaknya error dan letak errornya digunakan vektor sindrom.

Komputasi yang dilakukan menghasilkan transpose dari sindrom berupa vektor nol, maka kode yang diterima sama dengan kode yang dikirim yang artinya tidak terjadi error. Dan ketika hasil komputasi yang menghasilkan transpose dari sindrom bukan vektor nol, vektor penerima merupakan vektor kode yang terganggu dan kesalahan dapat dideteksi. Untuk deteksi error dapat dilakukan dengan mencocokkan transpose vector sindrom dengan vektor di setiap kolom matrik parity check yang bersangkutan. Jika didapat kecocokan dengan kolom i pada matrik parity check tersebut maka kesalahan terjadi pada bit ke i .

Jika akan memakai cara yang terakhir yaitu cara merepresentasikan setiap kolom dari matriks H dengan suatu bilangan bulat, maka matriks H itu harus merupakan parity check dari Hamming Code biner.

DAFTAR PUSTAKA

Vanstone, Scott A. and Paul C. van Oorschot. 1989. An Introduction to Error Correcting Codes with Applications. Norwell : Kluwer Academic Publishers.