Kuliah PD

Pertemuan ke-1:

Motivasi:

1. Mekanika

A. Hukum Newton ke-2:

Gaya yang bekerj a pada suatu massa sama dengan laju perubahan momentum terhadap waktu.

Misalkan F: gaya, m: massa benda, a: percepatan, v:kecepatan, dan momentum = mv dan jika massa konstan, maka

gaya $F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{d}{dt}v = ma$

Jadi $F = ma$

B. Percobaan bola jatuh:

Jika x jarak bola dengan tanah, maka kecepatan v dan percepatan a dari bola adalah

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ dan } a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2. Populasi

MIsalkan banyaknya populasi pada waktu t adalah P(t), maka laju perubahan populasi terhadap waktu t adalah $\frac{dP}{dt}$. Selanjutnya jika laju perubahan populasi sebanding dengan banyaknya populasi yang ada, maka

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Dengan k : konstanta dan disebut laju reproduksi

JIka laju reproduksinya tidak konstan. Hal ini bisa terjadi, misal karena faktor makanan dan tempat yang terbatas, maka diperoleh model

$$\frac{dP}{dt} = k(1 - \frac{P}{M})P$$

Disebut persamaan logistik.

Dengan M, k : konstan.

II. PENGERTIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL (PD)

PD adalah persamaan yang memuat variabel bebas, variabel tak bebas, dan derivatif dari variabel tak bebas terhadap variabel bebas.

Macam-macam PD:

1. PD biasa

Terdiri dari satu variabel bebas dan satu variabel tak bebas.

Bentuk:

$$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

Dengan x: variabel bebas, y: variabel tak bebas.

Contoh:

1. $\frac{dy}{dx} - 5x - 1 = 0$

2. $\frac{dP}{dt} - 6P = 0$

2. PD Parsial:

Variabel bebas lebih dari satu, varaibel tak bebas satu.

Misal: $f(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 0$ dengan z: variabel tak bebas, x, y: variabel bebas.

Contoh: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

3. PD simultan:

Variabel bebas satu, varaibel tak bebas lebih dari satu.

$f(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}) = 0$ dengan t: variabel bebas, x dan y: variabel tak bebas

Contoh: $\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}-3=0$

TINGKAT (ORDER) PD

Tingkat tertinggi dari derivatif yang terdapat dalam PD.

Contoh:

1. $\frac{dx}{dt}+2x-3=0$ adalah PD order 1

2. $2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dx}+4=0$ adalah PD order 2.

DERAJAT PD

Pangkat tertinggi dari derivatif tingkat tertinggi yang terdapat dalam PD.

Contoh:

1. $2\frac{d^2y}{dt^2}-3\left(\frac{dy}{dt}\right)^{10}+4y=2e^t$ adalah PD derajat 1.

2. $2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^3-3\left(\frac{dy}{dt}\right)^{10}+4y=2e^t$ adalah PD derajat 3.

BEBERAPA BENTUK PD

1. PD dengan variabel terpisah

2. PD dengan koefisien fungsi homogen.

3. PD eksaks

4. PD tidak eksaks.

5. PD linear tingkat satu.

6. PD linear tingkat n.

7. PD dengan koefisien fungsi linear.

Penyelesaian umum (PU) dari PD adalah penyelesaian yang memuat variabel bebas, variabel tak bebas, dan konstanta sebarang.

Penyelesaian khusus (PK) dari PD adalah adalah penyelesaian yang tidak memuat konstanta, yang diperoleh dari PU dengan mengganti konstanta dengan bilangan tertentu.

1. PD dengan variabel terpisah

PD $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ……………………………………..(1)

Disebut PD terpisah jika PD (1) dapat diubah ke bentuk

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Selanjutnya diselesaian dengan mengintegralkan kedua ruas.

Contoh:

1. $ydx + xdy = 0$

2. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)ydy = 0$

Fungsi f(x,y) disebut fungsi homogen berderajat n dalam x dan y jika $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ untuk setiap parameter λ.

Contoh:

$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ adalah fungsi homogen derajat 2 sebab

$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2$ = $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(x^2 + xy + y^2)$ = $\lambda^2 f(x,y)$.

Teorema 1: Jika M(x,y) dan N(x,y) kedua-duanya adalah fungsi homogen derajat sama, maka fungsi $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ adalah fungsi homogen derajat nol.

Teorema 2: Jika f(x,y) adalah fungsi homogen derajat nol dalam x dan y, maka f(x,y) adalah fungsi dari y/x saja.

PD tingkat 1 derajat 1 dengan koefisien fungsi homogen.

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ …………………………………(2)

PD (2) disebut PD dengan koefisien fungsi homogen jika M(x,y) dan N(x,y) adalah fungsi-fungsi homogen derajat sama.

$\frac{M(x,y)}{N(x,y)}dx + dy = 0$ dengan $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ adalah fungsi dari y/x saja.

Substitusi : $\frac{y}{x} = u$ atau y = ux.

Contoh:

1. $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ adalah PD dengan koefisien fungsi homogen sebab $M(x,y) = x^2 - xy + y^2$ dan $N(x,y) = -xy$ adalah fungsi-fungsi homogen derajat 2.

Untuk mencari PU:

Substitusi y =ux,

Maka $dy = udx + xdu$ dan nilai ini disubstitusikan ke PD semula, diperoleh

$$(1-u)dx - uxdu = 0$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{u}{1-u}du = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{u-1+1}{u-1}du = 0$$

$$\frac{1}{x}dx + du + \frac{1}{u-1}du = 0$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int du + \int \frac{1}{u-1}du = c$$

$$\ln(x) + u + \ln(u-1) = \ln C$$

$$xe^u(u-1) = C$$

$$xe^{\frac{y}{x}}(\frac{y}{x} - 1) = C$$

$e^{\frac{y}{x}}(y-x) = C$ penyelesaian umumnya.

Catatan:

1. Substitusi y =ux jika N(x,y) lebih sederhana dari M(x,y).

2. Substitusi x = wy jika M(x,y) lebih sederhana dari N(x,y).

Latihan 1.

Selidiki apakah PD berikut PD homogen. Jika ya, tentukan penyelesian umum dari PD tersebut.

1. $y' = \frac{y-x}{x}$
2. $y' = \frac{2y+x}{x}$
3. $y' = \frac{x^2+2y^2}{xy}$
4. $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$
5. $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$
6. $(x-2y)dx+(2x+y)dy=0$
7. $2(2x^2+y^2)dx-xydy=0$
8. $x^2\frac{dy}{dx}=4x^2+7xy+2y^2$
9. $(5v-u)du+(3v-7u)dv=0$
10. $t(s^2+t^2)ds-s(s^2-t^2)dt=0$