Laporan Penelitian

Studi Komparatif Metode Newton dan Metode Tali Busur untuk Menghampiri Akar Persamaan $f(x)=0$

Peneliti:

Drs. Sahid, MSc.

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Penbetahuan Alam
Universitas negeri Yogyakarta

Dilaksanakan dengan Dana DIK UNY No. 189/23/2002,
No. Kontrak: 6331/J35.13/PL/2002

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan metode **Newton** (atau lengkapnya metode *Newton—Raphson*) dan metode **Tali Busur** (*Secant*) untuk menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$. Metode Newton menggunakan sebuah hampiran awal dan nilai turunan padanya untuk mendapatkan hampiran berikutnya. Metode Tali Busur menggunakan dua buah hampiran awal dan perhitungan nilai fungsi di kedua titik untuk mendapatkan hampiran berikutnya. Kedua metode mempunyai hubungan yang cukup dekat, dalam arti metode Tali Busur dapat dianggap sebagai hampiran metode Newton, yakni dengan memandang tali busur kurva sebagai hampiran garis singgung. Sebagai ganti menghitung nilai turunan fungsi (yang tidak lain adalah gradien garis singgung) pada metode Newton, pada metode Tali Busur diperlukan perhitungan dua nilai fungsi untuk menarik sebuah tali busur kurva.

Hasil analisis dan eksperimen memperlihatkan bahwa metode Newton konvergen secara kuadratik (derajad kekonvergenannya 2) ke akar sederhana, sedangkan metode Tali Busur memiliki derajad kekonvergenan 1.618034 (**superlinier**). Jadi secara umum kekonvergenan metode Newton lebih cepat daripada metode Tali Busur. Untuk akar ganda, metode Newton mempunyai derajad kekonvergenan linier, dan dapat ditingkatkan menjadi kuadratik dengan menggunakan modifikasi rumus iterasinya. Akan tetapi modifikasi rumus iterasi Newton memerlukan informasi derajad akar atau perhitungan turunan yang lebih tinggi (untuk mengetahui derajad akarnya). Meskipun metode Newton memerlukan perhitungan turunan fungsi, dengan program MATLAB, untuk masukan cukup digunakan rumus fungsinya dan MATLAB dapat menghitung turunan fungsinya. Hal ini dilakukan dengan perhitungan simbolik.

Pemilihan hampiran awal dan batas toleransi sangat menentukan kekonvergenan kedua metode tersebut. Selain itu, kekonvergenan iterasi pada kedua metode tersebut juga dipengaruhi oleh perilaku fungsi di sekitar hampiran awal dan di sekitar akar. Untuk menjamin kekonvergenan kedua metode, khususnya karena adanya pengaruh hampiran awal, pemakaian kedua metode dapat digabung dengan metode lain yang bersifat stabil, misalnya metode pengapitan akar. Metode Newton atau metode Tali Busur dipakai setelah iterasinya hampir konvergen untuk mempercepat dan meningkatkan tingkat akurasi hampiran akar yang diperoleh.

Daftar Isi

Kata Pengantar

Puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan ke Hadhirat Allah SwT. atas nikmat kesehatan dan kekuatan yang diberikan kepada peneliti, sehingga kegiatan penelitian dan penulisan laporan penelitian ini dapat diselesaikan.

Penelitian ini merupakan penelitian mandiri yang dilaksanakan dengan dana DIK UNY No. 189/23/2002, No. Kontrak: 6331/J35.13/PL/2002, dan dilaksanakan selama 6 (enam) bulan.

Peneliti mengucapkan banyak terima kasih kepada berbagai pihak yang terlibat dalam penelitian ini, baik langsung maupun tak langsung:

1. Dekan FMIPA UNY, yang telah memberikan kesempatan kepada peneliti dengan memberikan Dana sesuai kontrak yang telah disepakati kedua belah pihak.
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika, yang telah memberikan layanan dan fasilitas yang diperlukan peneliti guna melaksanakan seminar proposal dan seminar hasil penelitian.
3. Para dosen Jurusan Pendidikan Matematika, atas partisipasinya dalam seminar proposal dan seminar penelitian dengan memberikan saran dan masukan yang terkait dengan penelitian ini.

Peneliti berharap agar hasil penelitian ini dapat dimanfaatkan sebagai bahan rujukan, baik oleh peneliti lain, dosen, maupun mahasiswa untuk kegiatan pengajaran mata kuliah yang terkait, misalnya Metode Numerik, atau untuk penelitian lain dalam bidang serupa. Meskipun demikian, peneliti menyadari bahwa tiada gading yang tak retak. Saran dan masukan dari berbagai pihak, apabila di dalam laporan ini terdapat kekeliruan atau kesalahan penulisan, peneliti dengan senang hati bersedia menerimanya untuk keperluan publikasi selanjutnya.

Yogyakarta, 12 Maret 2003

Peneliti

Bab I
Pendahuluan

A. Latar Belakang Masalah

Salah satu masalah yang sering ditemui di dalam matematika dan sains serta teknik adalah mencari akar persamaan; yakni jika diketahui sebuah fungsi f, akan dicari nilai-nilai x yang memenuhi $f(x) = 0$ (Borse, 1997: 151). Permasalahan ini dapat muncul dari masalah-masalah lain dalam matematika, misalnya mencari nilai *eigen* suatu matriks, menghitung titik potong sebuah kurva dengan sumbu-sumbu koordinat, mencari titik potong dua buah kurva, dan lain-lain.

Kebanyakan fungsi yang harus dicari akarnya tidak selalu berbentuk fungsi sederhana atau suku banyak dan tidak ada metode eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya (Jacques & Judd, 1987: 43). Sebagai contoh, misalnya diinginkan untuk menyelesaikan persamaan $(x+1)^2 e^{x^2-2} = 1$. Tidak ada rumus eksak untuk menghitung nilai-nilai x yang memenuhi persamaan tersebut. Sebagai alternatif penyelesaian persamaan-persamaan yang tidak memiliki rumus eksak adalah pemakaian metode numerik untuk mendapatkan hampiran akar-akar persamaan tersebut. Dengan menggunakan metode numerik, semua permasalahan numerik yang rumit dapat diselesaikan dengan hanya menggunakan operasi-operasi aritmetika sederhana dan logika serta menggunakan prosedur yang dapat dikerjakan oleh komputer (Jacques & Judd, 1987:1-2; Scheid, 1989: 1; Volkov, 1990:9).

Sesuai dengan sifatnya, metode numerik tidak bertujuan untuk mendapatkan penyelesaian eksak, namun mendapatkan hampiran yang cukup akurat untuk penyelesaian tersebut secara efisien. Tingkat keakuratan hampiran tersebut diukur dari galatnya, yang merupakan selisih antara nilai hampiran yang diperoleh dan penyelesaian eksak. Akan tetapi, oleh karena penyelesaian eksak biasanya tidak diketahui, maka tingkat keakuratan suatu hampiran biasanya diukur dari batas terbesar galatnya. Efisiensi suatu metode numerik diukur dari tingkat kekonvergenannya dan banyaknya operasi hitung yang diperlukan untuk mendapatkan suatu hampiran yang memenuhi batas galat yang ditentukan. Setiap metode numerik berbentuk rumus iterasi, dalam arti bahwa hampiran berikutnya diperoleh dengan menggunakan hampiran sebelumnya. Proses berhenti setelah hampiran yang terakhir didapat cukup akurat berdasarkan kriteria yang ditentukan. Iterasi dimulai dengan menggunakan hampiran awal yang diberikan.

Di antara berbagai metode untuk menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$ adalah metode **Newton** (atau lengkapnya metode *Newton—Raphson*) dan metode **Tali Busur** (*Secant*). Metode **Newton** memiliki ciri-ciri: (1) memerlukan sebuah hampiran awal, dan (2) memerlukan perhitungan turunan fungsi $f(x)$ dalam setiap iterasi. Ciri kedua metode Newton tersebut berkaitan dengan fakta bahwa hampiran berikutnya diperoleh dengan cara menarik garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik yang mempunyai absis hampiran sebelumnya hingga memotong sumbu-x. Titik potong garis singgung tersebut dengan sumbu-x merupakan hampiran berikutnya. Berbeda dengan metode Newton, metode **Tali Busur** memiliki ciri-ciri: (1) memerlukan dua buah hampiran awal, dan (2) memerlukan perhitungan nilai $f(x)$di kedua hampiran awal (sebelumnya). Hal ini mengingat bahwa pada metode Tali Busur, hampiran berikutnya diperoleh dengan menarik tali busur kurva yang melalui titik-titik dengan absis kedua hampiran terakhir. Titik potong tali busur tersebut dengan sumbu-x merupakan hampiran berikutnya. Proses berlanjut sampai hampiran yang diperoleh memenuhi syarat keakuratan yang ditentukan atau batas maksimum iterasi sudah tercapai.

Metode Tali Busur dapat dianggap sebagai hampiran metode Newton, yakni dengan memandang tali busur kurva sebagai hampiran garis singgung. (Hal ini memang cukup beralasan, khususnya jika kedua hampiran terakhir saling berdekatan.) Sebagai ganti menghitung nilai turunan fungsi (yang tidak lain adalah gradien garis singgung) pada metode Newton, pada metode Tali Busur diperlukan perhitungan dua nilai fungsi untuk menarik sebuah tali busur kurva. Oleh karena adanya kaitan erat antara kedua metode tersebut, maka perlu dilakukan sebuah kajian untuk membandingkan kedua metode tersebut. Untuk itulah penelitian ini dilakukan.

B. Rumusan Masalah

Permasalahan yang hendak dikaji dalam penelitian ini meliputi:

1) Berapakah derajad kekonvergenan metode Newton?
2) Berapakah derajad kekonvegenan metode Tali Busur?
3) Berapakah galat hampiran yang diperoleh dengan metode Newton?
4) Berapakah galat hampiran yang diperoleh dengan metode Tali Busur?
5) Apakah syarat hampiran awal agar iterasi Newton konvergen?
6) Apakah syarat hampiran awal agar iterasi Tali Busur konvergen?
7) Bagaimanakah penampilan kedua metode tersebut apabila digunakan untuk menyelesaikan beberapa tipe persamaan tertentu?

C. Tujuan Penelitian

Penelitian dilaksanakan dengan tujuan sebagai berikut:

1) untuk mengetahui derajad kekonvergenan metode Newton;

2) untuk mengetahui derajad kekonvergenan metode Tali Busur;

3) untuk mengetahui galat hampiran metode Newton;

4) untuk mengetahui galat hampiran metode Tali Busur;

5) untuk mengetahui syarat hampiran awal agar iterasi Newton konvergen;

6) untuk mengetahui syarat hampiran awal agar iterasi Tali Busur konvergen;

7) untuk melihat dan membandingkan penampilan metode Newton dan metode Tali Busur apabila digunakan untuk menyelesaikan beberapa tipe persamaan tertentu;

D. Manfaat Hasil Penelitian

Hasil penelitian akan memberikan penjelasan yang terperinci tentang perbandingan metode Newton dan metode Tali Busur, yang pada beberapa buku teks Metode Numerik biasanya tidak dijelaskan secara terperinci. Dengan demikian hasil penelitian ini akan dapat menambah wawasan bagi pembaca tentang kedua metode tersebut, sehingga dapat memilih metode yang tepat untuk mendapatkan suatu akar persamaan $f(x) = 0$. Penelitian ini juga dapat menjadi contoh untuk penelitian-penelitian lain dalam metode numerik, khususnya perbandingan beberapa metode numerik untuk menyelesaikan masalah yang sejenis. Pada akhirnya akan terbuka luas khasanah penelitian dalam metode numerik.

E. Pembatasan Permasalahan

Metode Newton dan metode Tali Busur yang hendak dikaji dalam penelitian ini dibatasi untuk fungsi-fungsi satu variabel. Tinjuan kedua metode tersebut meliputi kekonvergenan pada akar sederhana dan akar ganda. Contoh-contoh komputasi numerik dengan mengimplementasikan kedua metode akan diterapkan pada beberapa tipe fungsi, yakni fungsi polinomial nonlinier, fungsi eksponensial, fungsi trigonometri, dan kombinasinya. Semua fungsi yang dibahas dalam penelitian ini adalah fungsi kontinyu, setidaknya pada interval yang sedang menjadi perhatian.

Bab II
Kajian Pusataka

Pembahasan metode numerik untuk mencari hampiran akar persamaan memerlukan beberapa pengertian dasar sebagai berikut.

Definisi 1 (Akar Persamaan, Pembuat Nol Fungsi) (Mathews, 1992: 55)

Misalkan f adalah suatu fungsi kontinyu. Setiap bilangan r pada domain f yang memenuhi $f(r) = 0$ disebut ***akar persamaan*** *$f(x) = 0$, atau juga disebut* ***pembuat nol*** *fungsi f. Apabila tidak menimbulkan kerancuan, r sering dikatan sebagai akar f.*

Definisi 2 (Derajad Akar Persamaan) (Atkinson, 1993: 94; Mathews, 1992: 76)

Misalkan r adalah akar persamaan $f(x) = 0$. Jika terdapat bilangan asli m dan fungsi kontinyu $h(x)$ dengan $h(r) \neq 0$, sedemikian hingga $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = (x - r)^m h(x), \tag{1}$$

maka r disebut ***akar berderajad*** *m***.**

Dari (1) terlihat bahwa jika r pembuat nol $f(x)$ yang berderajad m, maka

$$f(r) = f'(r) = \ldots = f^{(m-1)}(r) = 0, \text{ dan } f^{m}(r) \neq 0.$$

Jika $m = 1$, maka r disebut **akar sederhana**. Jika $m > 1$, maka r disebut **akar ganda**. Untuk $m = 2$, maka r disebut **akar dobel**, dst.

Definisi 3 (Selisih Terbagi Newton) (Atkinsn, 1993: 111-112; Mathews, 1992: 229)

Selisih terbagi Newton tingkat pertama dan kedua fungsi f terhadap simpul-simpul a, b, c didefinisikan berturut-turut sebagai

$$f[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2}$$

dan

$$f[a,b,c] = \frac{f[b,c] - f[a,b]}{c - a}. \tag{3}$$

Definisi 4 (Polinomial Interpolasi Newton) (Atkinson, 1993: 114-115; Mathews, 1992: 230)

Polinomial Newton $P_1(x)$ yang melalui titik-titik $(x_1, f(x_1))$ dan $(x_2, f(x_2))$ adalah

$$P_1(x) = f(x_1) + (x - x_1) f[x_1, x_2]. \tag{4}$$

Polinomial Newton $P_2(x)$ yang melalui titik-titik $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, dan $(x_3, f(x_3))$ adalah

$$P_2(x) = P_1(x) + (x - x_1)(x - x_2) f[x_1, x_2, x_3]. \tag{5}$$

Teorema 1 (Teorema Nilai Rata-rata) (Mathews, 1992: 5)

Jika f adalah fungsi kontinyu pada interval $[a,b]$ dan $f'(x)$ ada untuk semua $a < x < b$, maka terdapat sebuah bilangan c, dengan $a < c < b$, sedemikian hingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lemma 1. (Atkinson, 1993: 111-112)

Misalkan f dan dua turunan pertamanya kontinyu pada interval yang memuat titik-titik $x_1, x_2,$ dan x_3. Dari definisi (2) dan (3) dapat diturunkan sifat-sifat

$$f[x_1, x_2] = f'(x), \tag{6}$$

dengan x adalah bilangan antara x_1 dan x_2, dan

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f''(z)}{2}, \tag{7}$$

dengan $\min(x_1, x_2, x_3) \le z \le \max(x_1, x_2, x_3)$.

Bukti:

Sifat (6) dapat diperoleh dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata, yakni oleh karena f dan f' kontinyu pada interval yang memuat x_1 dan x_2, maka terdapat bilangan x antara x_1 dan x_2 sedemikian hingga

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2],$$

dan kesamaan terakhir diperoleh dari definisi (2). Selanjutnya, sifat (7) dapat dibuktikan sebagai berikut. Definisikan fungsi-fungsi $E(t)$ dan $G(t)$ sebagai berikut:

$$E(t) = (t - x_1)(t - x_2) f[x_1, x_2, t], \tag{8}$$

dan

$$G(t) = E(t) - \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} E(x_3). \tag{9}$$

Fungsi-fungsi $E(t)$ dan $G(t)$ tersebut memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Karena f, f' dan f'' kontinyu, maka $G(t), G'(t)$ dan $G''(t)$ juga kontinyu pada interval yang sama.
2. $E(x_1) = E(x_2) = 0$ sehingga $G(x_1) = G(x_2) = G(x_3) = 0.$

Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata dapat diperoleh nilai x_1 antara x_1 dan x_2 dan x_2 antara x_2 dan x_3 sedemikian hingga $G'(x_1) = G'(x_2) = 0.$ Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata lagi pada $G'(t)$, dapat diperoleh z antara x_1 dan x_2, atau $min(x_1, x_2, x_3) \le z \le max(x_1, x_2, x_3)$, sedemikian hingga $G''(z) = 0$.

Selanjutnya, dengan mudah dapat dilihat bahwa $E''(t) = f''(t)$, sehingga

$$G''(t) = E''(t) - \frac{2E(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = f''(t) - \frac{2E(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \tag{10}$$

Dari (8) dan (10) dan dengan mengingat $G''(z) = 0$, diperoleh

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)f[x_1, x_2, x_3] = E(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\frac{f''(z)}{2}, \tag{11}$$

sehingga diperoleh (7).

Definisi 5 (Derajad Kekonvergenan) (Atkinson, 1993: 87; Mathews, 1992: 77)

Misalkan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ suatu barisan yang konvergen ke r dan misalkan $e_n = r - x_n$. Apabila terdapat sebuah bilangan m dan sebuah konstanta $C \neq 0$, sedemikian hingga

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^m} = C,$$

*maka m disebut **derajad kekonvergenan** barisan tersebut dan C disebut **konstanta galat asimptotik.** Khususnya, untuk $m = 1, 2, 3$, kekonvergenanya berturut-turut disebut **linier, kuadratik**, dan **kubik**.*

Definisi 6 (Titik Tetap Fungsi & Iterasi Titik Tetap) (Atkinson, 1993: 84; Mathews, 1992: 45)

*Misalkan g adalah suatu fungsi. Bilangan x pada domain g dikatakan merupakan **titik tetap** g jika memenuhi $x = g(x)$. Selanjutnya, iterasi*

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

disebut iterasi titik tetap.

Definisi 7 (Iterasi Newton -- Raphson) (Atkinson, 1993: 69; Mathews, 1992: 72)

Misalkan fungsi f mempunyai turunan pertama f'. Barisan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ yang diperoleh dari iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ untuk } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

*disebut barisan iterasi **Newton**. Fungsi g yang didefinisikan sebagai*

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{14}$$

disebut fungsi iterasi Newton – Raphson.

Terdapat hubungan antara akar persamaan $f(x) = 0$ dan titik tetap fungsi g. Dari (14) terlihat bahwa, jika $f(r) = 0$, maka $r = g(r)$. Metode Newton dapat dipandang sebagai contoh khusus metode Titik-Tetap (Conte & de Boor, 1981, 79).

Definisi 8 (Iterasi Tali Busur) (Atkinson, 1993: 80; Mathews, 1992: 82)

Barisan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *yang dihasilkan oleh iterasi*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \tag{15}$$

*disebut barisan iterasi **Tali Busur**.*

Dengan membandingkan (13) dan (15) dapat dipikirkan bahwa (15) merupakan hampiran (13), yang diperoleh dengan mengganti $f'(x_n)$ pada (13) dengan $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$. Metode Tali Busur juga merupakan modifikasi metode Posisi Palsu (*regular falsi*) (Conte & de Boor, 1981: 79). Metode Tali Busur dan metode Posisi Palsu menggunakan rumus iterasi (15) namun memiliki dua perbedaan:

a. Pada metode Posisi Palsu, interval $[x_{n-1}, x_n]$ selalu memuat akar yang hendak dicari, yakni $f(x_{n-1})f(x_n) < 0$, sedangkan pada metode Tali Busur tidak disyaratkan demikian.

b. Pada metode Posisi Palsu, nilai x_{n+1} digunakan untuk mengganti nilai x_{n-1} atau x_n, tergantung tanda nilai $f(x_{n+1})$, yakni

$$x_{n-1} = x_{n+1} \text{ jika } f(x_{n-1})f(x_{n+1}) > 0,$$

atau

$$x_n = x_{n+1} \text{ jika } f(x_n)f(x_{n+1}) > 0,$$

sedangkan pada metode Tali Busur penggantian nilai dilakukan dengan rumus $x_{n-1} = x_n$ dan $x_n = x_{n+1}$.

Bab III
Metode Penelitian

A. Materi / Bahan Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian matematis dan komputasi, yang dilakukan dengan cara melakukan analisis matematis menggunakan penarikan kesimpulan secara deduktif. Kesimpulan dari hasil penalaran deduktif bersifat determinitif, bukan probabilistik, sehingga tidak diperlukan pengujian hipotesis secara statistika. Hasil-hasil komputasi digunakan untuk mengkonfirmasikan hasil-hasil analisis matematis.

Oleh karena itu, materi penelitian ini berupa definisi, aksioma, dan fakta-fakta matematika lain dalam metode numerik, khususnya konsep-konsep yang terkait dengan metode Newton dan metode Tali Busur. Informasi-informasi tersebut biasanya terdapat di dalam buku-buku teks matematika secara umum, atau Metode Numerik khususnya, dan jurnal-jurnal matematika dan / atau metode numerik. Selain informasi tercetak, juga terdapat informasi *on-line*, yakni Internet, yang merupakan sumber informasi melimpah untuk mendukung kegiatan penelitian.

Analisis matematis (penalaran deduktif) dilakukan di atas kertas, sehingga diperlukan kertas dan pena untuk melakukan penelitian ini. Komputasi dilakukan dengan menggunakan bantuan komputer dan program komputer. Program komputer untuk mengimplementasikan kedua metode yang dibandingkan ditulis dengan menggunakan software MATLAB, yang merupakan paket spesifik matematika yang cocok untuk keperluan komputasi numerik.

B. Cara Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian matematika yang bersifat deduktif. Kesimpulan-kesimpulan yang diperoleh merupakan hasil proses penalaran secara deduktif berdasarkan fakta-fakta matematika yang berupa definisi, aksioma, notasi matematika, dan teorema-teorema yang sudah dibuktikan. Dalam penelitian ini tidak dilakukan analisis statistiks untuk pengambilan kesimpulan, sehingga tidak diperlukan populasi dan pengambilan sampel.

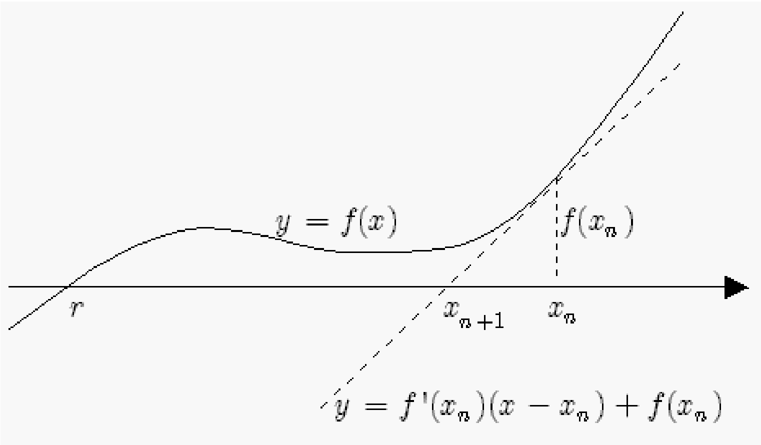
Secara terperinci, langkah-langkah penelitian ini meliputi:

1. Pengumpulan definisi dan aksioma yang diperlukan, khususnya tentang pengertian akar persamaan dan metode Newton dan metode Tali Busur;

2. Analisis deduktif untuk mendapatkan derajad kekonvergenan metode Newton dan metode Tali Busur;
3. Analisis deduktif untuk mendapatkan galat metode Newton dan metode Tali Busur;
4. Analisis deduktif untuk mendapatkan syarat kekonvergenan metode Newton dan metode Tali Busur;
5. Penyusunan program MATLAB yang mengimplementasikan metode Newton dan metode Tali Busur berdasarkan hasil analisis galat dan syarat kekonvergenan kedua metode tersebut;
6. Penggunaan program-program MATLAB tersebut untuk menyelesaikan beberapa tipe persamaan, untuk menghampiri akar sederhana dan akar ganda, baik yang akar eksaknya diketahui mapun tidak dan mencatat hasil-hasil eksperimen, serta menyajikannya dalam bentuk tabel-tabel.

Bab IV
Hasil Penelitian

A. Penurunan Rumus Iterasi Newton – Raphson



Gambar 1. Iterasi Newton - Raphson

Iterasi Newton – Raphson dimulai dari sebuah hampiran awal untuk akar r, kemudian menghitung hampiran selanjutnya dengan cara sebagai berikut.

1. Misalkan x_n adalah hampiran awal pada langkah ke-*n, n=0, 1, 2, ….*
2. Hitung gradien garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ di titik $(x_n, f(x_n))$, yakni $f'(x_n)$ dan tentukan persamaan garis singgungnya, yakni $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.
3. Hampiran berikutnya adalah absis titik potong garis singgung tersebut dengan sumbu-*x*, yakni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{16}$$

Langkah-langkah tersebut diperlihatkan pada Gambar 1.

Rumus iterasi (16) juga dapat diturunkan dari deret Taylor $f(x)$ di sekitar x_n

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(x_n) + \ldots \tag{17}$$

dengan mengasumsikan x_n dan hampiran berikutnya, x_n cukup dekat ke akar r, dan meng-abaikan suku ke-3 dan seterusnya pada ruas kanan (17), akan diperoleh (16). Dalam hal ini, fungsi f telah dihampiri oleh garis singgung di titik $(x_n, f(x_n))$. Jadi pada prinsipnya sama dengan pendekatan geometris sebelumnya.

B. Analisis Kekonvergenan Metode Newton – Raphson

Sebelum membahas kekonvergenan iterasi Newton – Raphson, berikut akan ditinjau sebuah teorema mengenai iterasi titik tetap, yang dapat dimanfaatkan dalam pembuktian selanjutnya.

Teorema 2 (Pemetaan Konstraksi) (Atkinson, 1993: 84 - 85)

Misalkan g *dan* g' *kontinyu pada interval* $[a,b]$ *dan memenuhi*

$$x \in [a,b] \Rightarrow a \le g(x) \le b. \tag{18}$$

Selanjutnya, misalkan

$$\lambda = \max_{a \le x \le b} |g'(x)| < 1, \tag{19}$$

maka:

Terdapat sebuah akar tunggal $r \in [a,b]$ *yang memenuhi* $r = g(r)$.

Untuk setiap hampiran awal $x_0 \in [a,b]$, *iterasi titik tetap (12) konvergen ke* r.

Untuk setiap $n \ge 2$ *berlaku* $|r - x_n| \le \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1|$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{r - x_{n+1}}{r - x_n} = g'(r)$, *sehingga untuk* x_n *yang cukup dekat dengan* r *berlaku*

$$r - x_{n+1} \approx g'(r)(r - x_n). \tag{20}$$

Bukti:

Definisikan fungsi f dengan $f(x) = x - g(x)$. Karena g kontinyu pada $[a,b]$, maka f juga kontinyu pada interval tersebut. Selanjutnya, dari (18) berlaku $f(a) \le 0$ dan $f(b) \ge 0$, sehingga menurut Teorema Nilai Antara terdapat $r \in [a,b]$ yang memenuhi $f(r) = 0$ atau $r = g(r)$. Selanjutnya, andaikan terdapat dua buah nilai r_1 dan r_2 yang memenuhi $r_1 = g(r_1)$ dan $r_2 = g(r_2)$, maka menurut Teorema Nilai Rata-rata terdapat c antara a dan b yang memenuhi

$$g'(c) = \frac{g(r_2) - g(r_1)}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1} = 1.$$

Hal ini bertentangan dengan hipotesis (19).

Dari (18) , untuk setiap hampiran awal $x_0 \in [a,b]$, nilai-nilai x_n yang dihasilkan oleh iterasi titik tetap (12) juga terletak pada interval $[a,b]$. Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata, diperoleh

$$r - x_{n+1} = g(r) - g(x_n) = g'(c_n)(r - x_n), \tag{21}$$

untuk suatu nilai c_n antara r dan x_n. Akan tetapi, karena r dan x_n pada $[a,b]$, maka demikian pula c_n, sehingga dari (19) diketahui bahwa, untuk $n \geq 0$ berlaku

$$\left|r - x_{n+1}\right| \leq \lambda \left|r - x_n\right| \leq \lambda^2 \left|r - x_{n-1}\right| \leq \ldots \leq \lambda^{n+1} \left|r - x_0\right| \tag{22}$$

Karena $0 < \lambda < 1$, maka ruas kanan (22) konvergen ke 0, yang berakibat x_n konvergen ke r.

Dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga dan (22), diperoleh

$$\begin{aligned} \left|r - x_0\right| &\leq \left|r - x_1\right| + \left|x_1 - x_0\right|, \\ &\leq \lambda \left|r - x_0\right| + \left|x_1 - x_0\right|, \\ (1-\lambda)\left|r - x_0\right| &\leq \left|x_1 - x_0\right|, \\ \left|r - x_0\right| &\leq \frac{1}{1-\lambda}\left|x_1 - x_0\right|, \end{aligned}$$

sehingga $\left|r - x_n\right| \leq \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\left|x_0 - x_1\right|$. Oleh karena x_n konvergen ke r dan c_n antara r dan x_n maka c_n juga konvergen ke r sehingga, dari (21) diperoleh

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} = g'(r). \blacksquare \tag{23}$$

Dari hipotesis (19) dapat diketahui bahwa $\left|g'(r)\right| < 1$. Kondisi ini sangat erat kaitannya dengan kekonvegenan iterasi Titik Tetap (12). Akibat berikut memberikan syarat yang lebih mudah daripada syarat pada Teorema 2 untuk menjamin kekonvergenan iterasi (12).

Akibat 1 (Syarat Kekonvergenan Iterasi Titik Tetap)

Misalkan g dan g' kontinyu pada interval $[c,d]$ yang memuat titik tetap r. Jika $\left|g'(r)\right| < 1$, maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap hampiran awal $x_0 \in \mathbf{I}_\delta = [r-\delta, r+\delta] \subseteq [c,d]$, iterasi (12) konvergen ke r.

Bukti:

Karena $\left|g'(r)\right| < 1$, maka $\dfrac{1 - g'(r)}{2} > 0$. Karena g' kontinyu pada $[c,d]$, yang memuat r, maka $\lim\limits_{x \to r} g'(x) = g'(r)$. Ini berarti terdapat suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $|r - x| \leq \delta$, maka $\left|g'(r) - g'(x)\right| \leq \dfrac{1 - g'(r)}{2}$ atau $-1 < \dfrac{3g'(r) - 1}{2} \leq g'(x) \leq \dfrac{1 + g'(r)}{2} < 1$ karena $\left|g'(r)\right| < 1$. Jadi,

$$\left|g'(x)\right| < 1, \; \forall x \in \mathbf{I}_\delta = [r - \delta, r + \delta] \subseteq [c,d]. \tag{24}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan teorema Nilai Rata-rata, diperoleh

$$\left|\frac{g(x)-g(r)}{x-r}\right| = |g'(x)| < 1, \tag{25}$$

untuk suatu x antara r dan x (jadi, $x \in \mathbf{I}_d$). Karena $|r-x| \le d$ dan $r = g(r)$, maka diperoleh

$$|g(x)-r| < d, \tag{26}$$

yang berarti $g(x) \in \mathbf{I}_d$. Dengan demikian kedua hipotesis **Teorema 2** dipenuhi pada interval $\mathbf{I}_d$, sehingga keempat kesimpulannya pun dipenuhi, termasuk bahwa iterasi (12) konvergen ke r untuk setiap hampiran awal $x_0 \in \mathbf{I}_d$. ■

Hasil (23) menunjukkan bahwa iterasi Titik Tetap memiliki kekonvergenan linier. Bagaimanakah jika $g'(r) = 0$? Dalam hal ini iterasi Titik Tetap akan mempunyai tingkat kekonvegenan yang lebih tinggi, sebagaimana dinyatakan dalam Akibat berikut ini.

Akibat 2 (Kekonvergenan Tingkat Tinggi Iterasi Titik Tetap)

Misalkan iterasi Titik Tetap (12) konvergen ke titik tetap fungsi g, yakni r. Jika fungsi g memenuhi

$$g'(r) = g''(r) = \ldots = g^{(m-1)}(r) = 0, \ dan\ g^{(m)}(r) \ne 0, \ m \ge 1,$$

maka iterasi Titik Tetap tersebut memiliki derajad kekonvergenan m.

Bukti:

Perhatikan ekspansi $g(x_n)$ di sekitar r, yakni

$$g(x_n) = g(r) + (x_n - r)g'(r) + \frac{(x_n-r)^2}{2} g''(r) + \ldots + \frac{(x_n-r)^{m-1}}{(m-1)!} g^{(m-1)}(r) + \frac{(x_n-r)^m}{m!} g^{(m)}(c_n) \tag{27}$$

dengan c_n *adalah suatu nilai antara* x_n *dan* r. Dari hipotesis mengenai fungsi $g(x)$, dapat diketahui bahwa *m* suku pertama pada ruas kanan persamaan (27) bernilai ***r***, sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = g(x_n) = r + \frac{(x_n-r)^m}{m!} g^{(m)}(c_n), \tag{28}$$

sehingga $\dfrac{(x_{n+1}-r)}{(x_n-r)^m} = \dfrac{g^{(m)}(c_n)}{m!}$. Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{r - x_{n+1}}{(r-x_n)^m}\right| = \left|\frac{g^{(m)}(r)}{m!}\right|, \tag{29}$$

yang berarti bahwa iterasi Titik Tetap memiliki derajad kekonvergenan *m*. ■

Berikut ditinjau kekonvergenan iterasi Newton – Raphson (16). Pertama akan ditinjau kasus r *merupakan akar sederhana, yakni* $f'(r) \neq 0$. Dengan kata lain, titik $(0, f(r))$ bukan merupakan titik singgung kurva $y = f(x)$ pada sumbu-*x*. Telah diasumsikan bahwa f kontinyu. Misalkan f memiliki setidaknya dua turunan pertama yang kontinyu pada suatu interval **I** yang memuat akar r. Dari definisi **fungsi iterasi Newton – Raphson** (14) diperoleh

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}, \qquad (30)$$

sehingga $g'(r) = \dfrac{f(r)f''(r)}{[f'(r)]^2} = 0,\ mengingat\ f(r) = 0.$

Selanjutnya, karena f, f', dan f'' kontinyu, maka g' juga kontinyu. Oleh karena $g'(r) = 0,$ maka menurut Teorema Nilai Antara, dapat dicari suatu interval $\mathbf{I}_\delta = [r - \delta, r + \delta]$ dengan $\delta > 0,$ sedemikian hingga $|g'(x)| < 1$ untuk semua $x \in \mathbf{I}_\delta$. Sekarang akan dipandang iterasi Newton (16) sebagai iterasi titik tetap terhadap fungsi g:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ \ dengan\ x_n \in \mathbf{I}_\delta. \qquad (31)$$

Oleh karena $|g'(x)| < 1$ untuk semua $x \in \mathbf{I}_\delta$, maka berdasarkan Akibat 1, barisan $\{x_n\}_0^\infty$ yang dihasilkan oleh iterasi (31) konvergen ke r apabila $x_0 \in \mathbf{I}_\delta$. Hasil di atas dapat disimpulkan ke dalam teorema sebagai berikut.

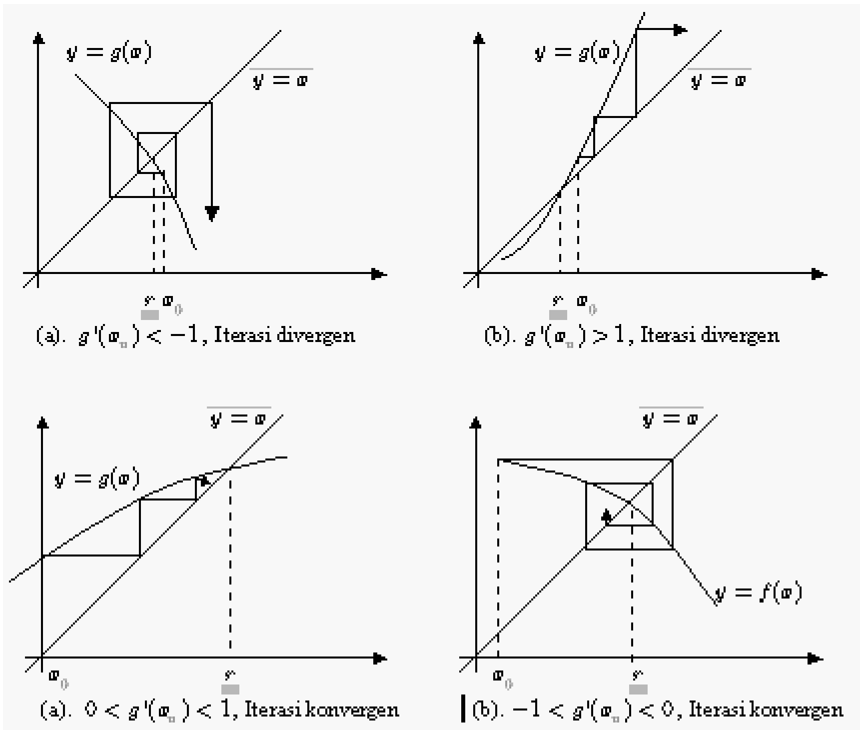
Teorema 3 (Syarat Kekonvergenan Iterasi Newton – Raphson)

*Misalkan f memiliki setidaknya dua turunan pertama yang kontinyu pada suatu interval **I** yang memuat akar sederhana r, di mana $f(r)=0$. Jika $f'(r) \neq 0$, maka terdapat suatu interval $\mathbf{I}_\delta = [r - \delta, r + \delta]$ dengan $\delta > 0$, sedemikian hingga barisan $\{x_n\}_0^\infty$ yang dihasilkan oleh iterasi (31) konvergen ke r apabila $x_0 \in \mathbf{I}_\delta$.*

Bilangan δ dapat dipilih sedemikian hingga

$$|g'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \right| < 1, \quad \forall x \in \mathbf{I}_\delta = [r - \delta, r + \delta]. \qquad (32)$$

Akan tetapi, nilai r mungkin tidak diketahui (sebab jika sudah diketahui, tidak perlu lagi digunakan metode numerik!). Oleh karena itu, dalam praktek untuk menjamin kekonvergenan iterasi (31) dapat dicari hampiran awal x_0 pada sebuah interval terkecil **I** yang memuat r (dapat diperkirakan dengan menggambar kurva $y = f(x)$) yang memenuhi $\underset{x \in \mathbf{I}}{Max}\ |g'(x)| < 1$. Secara visual hal ini dapat diperlihatkan pada **Gambar 2**.



Gambar 2: Kekonvergenan Iterasi Titik Tetap

Teorema berikut memberikan alternatif lain untuk menentukan hampiran awal yang menjamin konvergensi iterasi Newton (Conte & de Boor, 1981: 104 – 1-5).

Teorema 4 (Syarat Kekonvergenan Iterasi Newton – Raphson)

Jika kedua turunan pertama f kontinyu pada interval berhingga $[a,\ b]$ dan f memenuhi syarat-syarat:

(i) $f(a)f(b) < 0$

(ii) $f'(x) \neq 0, x \in [a,b]$

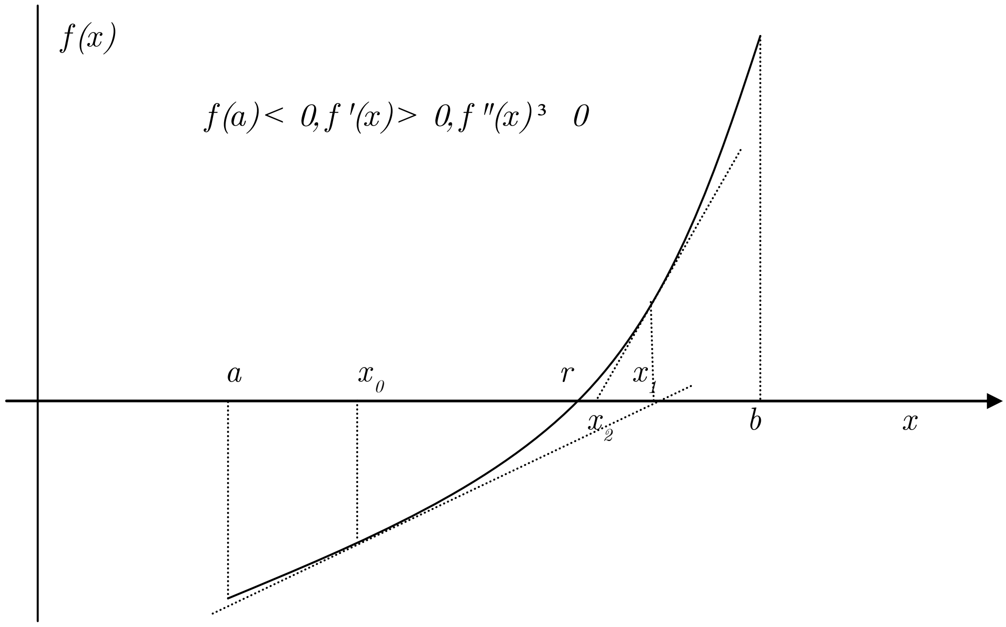
(iii) $f''(x) \leq 0$ *atau* $f''(x) \geq 0$ *untuk semua* $x \in [a,b]$

(iv) $\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|} < b - a$ *dan* $\dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|} < b - a$,

maka iterasi Newton akan konvergen secara tunggal ke akar $r \in [a,b]$, *di mana* $f(r)=0$, *untuk setiap hampiran awal* $x_0 \in [a,b]$.

Syarat (i) menjamin adanya akar pada $[a,\ b]$ (Teorema Nilai Antara). Bersama syarat (ii) dijamin adanya akar tunggal pada $[a,\ b]$ (Teorema Nilai Rata-rata). Syarat (iii) menyatakan bahwa pada $[a,\ b]$ kurva $y = f(x)$ bersifat cekung ke atas atau ke bawah dan juga, syarat (ii) berarti $f'(x)$ monoton positif atau monoton negatif (jadi $f(x)$ monoton naik atau monoton turun) pada $[a,\ b]$. Akibatnya, titik potong garis singgung kurva di $(a, f(a))$ dengan sumbu-x

berada di kanan $\boldsymbol{a}$ dan titik potong garis singgung kurva di $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{f(b)})$ dengan sumbu-$\boldsymbol{x}$ berada di kiri $\boldsymbol{b}$. Karena syarat (iv), kedua titik potong berada pada interval $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$. Dengan demikian, iterasi Newton akan menghasilkan barisan hampiran pada $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.



Gambar 3 Iterasi Newton untuk fungsi cekung dengan turunan monoton

Tanpa kehilangan sifat umum, misalkan $f(a) < 0$ dan $f''(x) \geq 0$ pada $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ (kurva $y = f(x)$ bersifat cekung menghadap ke atas, seperti pada Gambar 3). Dari iterasi Newton

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

(i) jika $r < x_0 \leq b$, maka keempat syarat di atas dipenuhi pada interval $[a, x_0]$, sehingga $r \leq x_1 < x_0$ dan iterasinya akan konvergen secara menurun ke r;

(ii) jika $a \leq x_0 < r$, maka $r < x_1 \leq b$, sehingga iterasi berikutnya persis seperti kasus (i).

Untuk kasus-kasus $f(a)$ *dan* $f''(x)$ yang lain dapat diturunkan secara serupa.

C. Analisis Galat Metode Newton - Raphson

Dengan menggunakan hipotesis tentang fungsi f dan akar sederhana r pada bagian **B**, misalkan E_n menyatakan galat hampiran Newton pada iterasi ke-*n*, yakni $E_n = r - x_n$. Oleh karena $f'(r) \neq 0$ dan f' kontinyu, maka $f'(x_n) \neq 0$ untuk nilai-nilai x_n yang dekat dengan r. Demikian pula, misalkan $f(x_n) \neq 0$, sehingga dengan menggunakan Teorema Taylor diperoleh

$$f(r)=f(x_n)+E_n f'(x_n)+\frac{1}{2}E_n^2 f''(c_n)$$

dengan c_n terletak antara x_n dan r. Oleh karena $f(r)=0$ dan $f'(x_n)\neq 0$, maka diperoleh

$$0=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+E_n+\left[\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}\right]E_n^2,\quad atau\ r-\left[x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]=\left[\frac{-f''(c_n)}{2f'(x_n)}\right]E_n^2,$$

dan dari rumus iterasi (31) akhirnya diperoleh

$$E_{n+1}=r-x_{n+1}=\left[\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}\right]E_n^2. \tag{33}$$

Apabila iterasi (31) konvergen, maka $x_n \to r\ dan\ c_n \to r\ jika\ n\to\infty$. Dengan demikian didapatkan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{E_{n+1}}{E_n^2}\right|=\left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|=C. \tag{34}$$

Persamaan (34) menyatakan bahwa kekonvergenan iterasi Newton ke akar sederhana bersifat kuadratik. Selanjutnya ditinjau kasus akar ganda.

Jika r adalah akar ganda berderajad $m>1$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x)=(x-r)^m h(x)$ dengan h adalah fungsi kontinyu yang bersifat $h(r)\neq 0$. Selanjutnya,

$$f'(x)=(x-r)^{m-1}\left[mh(x)+(x-r)h'(x)\right].$$

Oleh karena itu, dari definisi (14) diperoleh

$$g(x)=x-\frac{(x-r)h(x)}{mh(x)+(x-r)h'(x)}, \tag{35}$$

sehingga

$$g'(x)=\frac{m(m-1)h^2(x)-m(x-r)h(x)-(x-r)h'(x)-(x-r)^2h(x)h''(x)}{\left[mh(x)+(x-r)h'(x)\right]^2}, \tag{36}$$

sehingga $|g'(r)|=\frac{m-1}{m}<1$, karena $m>1$. Berdasarkan Akibat 1 dapat dicari suatu interval yang memuat r dan hampiran awal yang menjamin iterasi:

$$x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{(x_n-r)h(x_n)}{mh(x_n)+(x_n-r)h'(x_n)} \tag{37}$$

konvergen ke r. Selanjutnya, dari (37) dapat diturunkan galat iterasi

$$E_{n+1}=E_n+\frac{-E_nh(x_n)}{mh(x_n)-E_nh'(x_n)}=E_n\left\{\frac{(m-1)h(x_n)-E_nh'(x_n)}{mh(x_n)-E_nh'(x_n)}\right\}, \tag{38}$$

atau

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \left\{ \frac{(m-1)h(x_n) - E_n h'(x_n)}{mh(x_n) - E_n h'(x_n)} \right\}. \tag{39}$$

Jika x_n konvergen ke r, maka $\lim_{n \to \infty} E_n = 0$, sehingga

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n} \right| = \frac{m-1}{m} \tag{40}$$

mengingat $h(r) \neq 0$. Persamaan pada (40) sesuai dengan hasil (23). Dari (40) diketahui bahwa kekonvergenan iterasi Newton – Raphson ke akar ganda bersifat linier.

Hasil-hasil di atas dapat dirangkum dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 5 (Laju Kekonvergenan Iterasi Newton – Raphson)

Misalkan barisan barisan $\{x_n\}_0^\infty$ *yang dihasilkan oleh iterasi (16) konvergen ke* r, *di mana* $f(r)=0$. *Misalkan* E_n *menyatakan galat hampiran Newton pada iterasi ke-n, yakni* $E_n = r - x_n$.

Jika r *akar sederhana, maka kekonvergenan tersebut bersifat kuadratik, yakni* $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n^2} \right| = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|$.

Jika r *akar ganda berderajad* $m > 1$, *maka kekonvergenan tersebut bersifat linier, yakni* $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n} \right| = \frac{m-1}{m}$.

Selanjutnya akan ditinjau alternatif lain pemilihan hampiran awal x_0 yang sesuai untuk menjamin kekonvergenan iterasi Newton – Raphson. Untuk kasus akar sederhana, dari (33) dapat diperoleh hubungan

$$r - x_{n+1} \approx \lambda (r - x_n)^2$$

untuk nilai-nilai x_n yang dekat dengan r, dengan $\lambda = \frac{-f''(r)}{2f'(r)}$, mengingat $f'(r) \neq 0$. Dengan asumsi semua x_n dekat dengan r, secara induksi matematis diperoleh

$$\lambda (r - x_n) \approx \left[\lambda (r - x_0) \right]^{2^n}, \qquad n \geq 0. \tag{41}$$

Agar $x_n \to r$ atau $(r - x_n) \to 0$, syaratnya adalah $|\lambda (r - x_0)| < 1$, atau

$$|r - x_0| < \left| \frac{1}{\lambda} \right| = \left| \frac{2f'(r)}{f''(r)} \right|. \tag{42}$$

Jadi, agar iterasi (16) konvergen ke akar sederhana r, maka hampiran awal x_0 harus dipilih yang memenuhi (42). Terlihat, jika nilai mutlak λ cukup besar, maka x_0 harus dipilih cukup dekat dengan r. Akan tetapi, oleh karena r mungkin tidak diketahui, maka jika demikian nilai λ juga tidak diketahui. Dalam hal ini, hampiran awal dapat dipilih berdasarkan Teorema 3. Pemakaian hampiran awal sebarang tidak menjamin kekonvergenan iterasi Newton.

Estimasi Galat

Dalam praktek, iterasi dilakukan sebanyak berhingga kali, sehingga harus dihentikan setelah galat hampiran ke-n, yakni E_n tidak melebihi batas terkecil yang ditentukan. Oleh karena itu diperlukan hampiran nilai E_n agar dapat digunakan sebagai kriteria penghentian iterasi. Berikut dibahas bagaimana untuk mendapatkan hampiran nilai E_n.

Oleh karena $f(r) = 0$, maka

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_n) - f(r) \\ &= f'(c_n)(x_n - r), \end{aligned} \tag{43}$$

dengan c_n adalah bilangan antara r dan x_n. Kesamaan terakhir diperoleh dengan menggunakan teorema Nilai Rata-rata. Apabila nilai x_n cukup dekat dengan r, maka nilai $f'(c_n)$ dapat dihampiri oleh $f'(x_n)$, sehingga diperoleh hubungan

$$E_n = r - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(c_n)} \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n. \tag{44}$$

Hasil terakhir diperoleh dari rumus iterasi Newton (16).

Jadi telah diperoleh galat hampiran ke-n, yakni E_n, dengan menggunakan selisih hampiran ke-$(n+1)$ dan hampiran ke-n. Ini berarti, untuk mengetahui hampiran nilai E_n, iterasi harus dijalankan satu langkah lagi, baru akan diperoleh nilai hampiran galat tersebut. Hal ini tentu kurang membuat nyaman, karena seharusnya sampai iterasi ke-n, kita sudah harus dapat menaksir galatnya dengan menggunakan nilai-nilai yang sudah diperoleh, bukan dengan menggunakan nilai-nilai yang belum dihitung.

Dengan memandang iterasi Newton – Raphson (16) sebagai iterasi Titik Tetap (31), sebagaimana sudah dikerjakan dalam analisis sebelumnya, kita tahu bahwa $f(r) = 0$ ekivalen dengan $r = g(r)$. Selanjutnya, didefinisikan

$$\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}, \quad n \geq 2. \tag{45}$$

Dari (31) dan dengan menggunakan teorema Nilai Rata-rata diperoleh

$$\lambda_n = \frac{g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}} = g'(\xi_n),$$

untuk suatu nilai ξ_n $antara\ x_{n-1}$ $dan\ x_{n-2}$. Dengan asumsi semua x_n cukup dekat dengan r, dari (43) dan hasil terakhir didapatkan

$$r - x_n = g'(c_n)(r - x_{n-1}) \approx g'(\xi_n)(r - x_{n-1}) = \lambda_n (r - x_{n-1}).$$

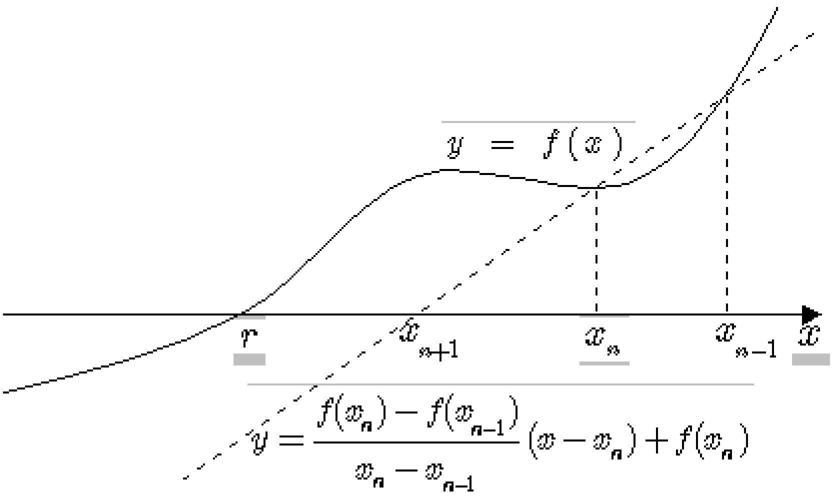
Setelah dilakukan sedikit manipulasi aljabar diperoleh *hampiran galat Aitken* (Atkinson, 1993: 90):

$$E_n = r - x_n \approx \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_n}(x_n - x_{n-1}) = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}}, \quad n \ge 2. \tag{46}$$

Dari rumus terakhir kita dapat menghitung hampiran galat pada iterasi ke-n dengan menggunakan nilai-nilai hampiran akar yang diperoleh pada tiga iterasi terakhir. Dengan demikian berdasarkan besarnya hampiran galat tersebut dapat diambil keputusan apakah iterasi dilanjutkan atau dihentikan (dalam arti dianggap sudah konvergen, dalam batas galat yang ditentukan).

D. Penurunan Rumus Iterasi Tali Busur

Berbeda dengan iterasi Newton – Raphson, yang hanya memerlukan sebuah hampiran awal, iterasi Tali Busur memerlukan dua buah hampiran awal. Akan tetapi dalam rumus iterasi Tali Busur tidak diperlukan perhitungan nilai turunan, melainkan perhitungan nilai sebuah fungsi di dua titik yang berbeda. Berikut adalah langkah-langkah penurunan iterasi Tali Busur, sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Metode Tali Busur untuk Menghampiri Nilai r.

1. Pada langkah ke-n, sudah diketahui hampiran awal x_n dan x_{n-1}, $n=1, 2, 3, \ldots$
   Tentukan persamaan tali busur (garis) yang yang melalui titik $(x_n, f(x_n))$ dan $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, yakni

$$y = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) + f(x_n) \qquad (47)$$

2. Hampiran berikutnya adalah absis titik potong tali busur tersebut dengan sumbu-*x*, yakni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \qquad (48)$$

Rumus (48) sangat mirip dengan rumus (16). Jika $f'(x_n)$ pada (16) diganti dengan $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$, maka diperoleh (48). Jadi (48) dapat dipandang sebagai hampiran (16).

E. Analisis Kekonvergenan Iterasi Tali Busur

Dengan menggunakan pengertian selisih terbagi Newton (2) dan (3) dan rumus iterasi (48) serta dengan mengingat bahwa $f(r) = 0$, galat hampiran x_{n+1} dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
r - x_{n+1} &= r - \left(x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \right) \\
&= -(r - x_n) \frac{\left\{ \frac{f(r) - f(x_n)}{r - x_n} \right\} - \left\{ \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \right\}}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \\
&= -(r - x_n)(r - x_{n-1}) \frac{\frac{\{f[r, x_n] - f[x_n, x_{n-1}]\}}{r - x_{n-1}}}{f[x_n, x_{n-1}]} \\
&= -(r - x_n)(r - x_{n-1}) \frac{f[x_{n-1}, x_n, r]}{f[x_{n-1}, x_n]}.
\end{aligned}$$

Dari (6) dan (7) kesamaan terakhir dapat diubah menjadi

$$r - x_{n+1} = -(r - x_n)(r - x_{n-1}) \left[\frac{f''(x)}{2f'(z)} \right] \qquad (49)$$

dengan $\min(x_{n-1}, x_n) \le z \le \max(x_{n-1}, x_n)$ dan $\min(x_{n-1}, x_n, r) \le x \le \max(x_{n-1}, x_n, r)$.

Jika dimisalkan $K_n = \frac{-f''(x)}{2f''(z)}$, maka galat (49) dapat dituliskan sebagai

$$r - x_{n+1} = -(r - x_n)(r - x_{n-1}) K_n, \quad n \ge 1, \qquad (50)$$

atau galat (49) dapat dituliskan sebagai

$$|E_{n+1}| = |K_n| \, |E_n| \, |E_{n-1}|, \quad n \ge 1, \qquad (51)$$

dengan memisalkan $E_n = r - x_n$.

Jika x_n konvergen ke r, maka K_n konvegen ke $\frac{-f''(r)}{2f'(r)} \equiv K$, asalkan $f'(r) \neq 0$ (r merupakan akar sederhana). Sekarang akan dicari nilai m yang memenuhi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^m} = C \neq 0.$$

Dari (51) dapat diturunkan kesamaan

$$\begin{aligned} \frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^m} &= |E_n|^{1-m} |E_{n-1}| \, |K_n| \\ &= |K_n| \left(\frac{|E_n|}{|E_{n-1}|^m} \right)^a, \end{aligned} \tag{52}$$

dengan syarat $a = 1 - m, \; dan \; am = -1, \;\; atau \; m^2 - m - 1 = 0$, atau $m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Pilih nilai $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034.$

Sekarang perhatikan, barisan $\{Z_n\}$ yang didefinisikan dengan $Z_n = \frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^m}$. Berdasarkan syarat di atas barisan tersebut akan konvergen ke suatu konstanta Z bersamaan dengan K_n konvergen ke K. Jadi iterasi "titik tetap"

$$Z_{n+1} = |K_n| \, Z_n^a = |K_n| \, Z_n^{-1/m}$$

akan konvergen ke titik tetap Z, sedemikian hingga $Z = |K| \, Z^{-1/m}$. Dengan mengingat $1 + 1/m = m$, diperoleh penyelesaian

$$Z = |K|^{1/m} = |K|^{m-1}. \tag{53}$$

Dengan demikian kita telah membuktikan teorema sebagai berikut.

Teorema 6 (Laju Kekonvergenan Iterasi Tali Busur)

*Misalkan barisan barisan $\{x_n\}_0^\infty$ yang dihasilkan oleh iterasi (48) konvergen ke r, di mana $f(r)=0$. Misalkan E_n menyatakan galat hampiran metode Tali Busur pada iterasi ke-**n**, yakni $E_n = r - x_n$. Jika r akar sederhana, maka derajad kekonvergenan iterasi tersebut adalah $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$, yakni*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n^{1,619034}} \right| = |K|^{0,618034} = \left| \frac{-f''(r)}{2f'(r)} \right|^{0,618034}. \tag{54}$$

Jadi, metode Tali Busur memiliki derajad kekonvergenan "super-linier", melebihi linier, namun belum sampai tingkat kuadratik. Terdapat pendekatan lain dalam pembuktian terorema di atas, yang disajikan pada Lampiran A.

Untuk hampiran-hampiran x_{n-1} dan x_n yang sangat dekat dengan dan mendekati konvergen ke r, galat $E_{n+1} = r - x_{n+1}$ mendekati nilai 0, sehingga

$$x_{n+1} - x_n = (r - x_n) - (r - x_{n+1}) \approx E_n = r - x_n.$$

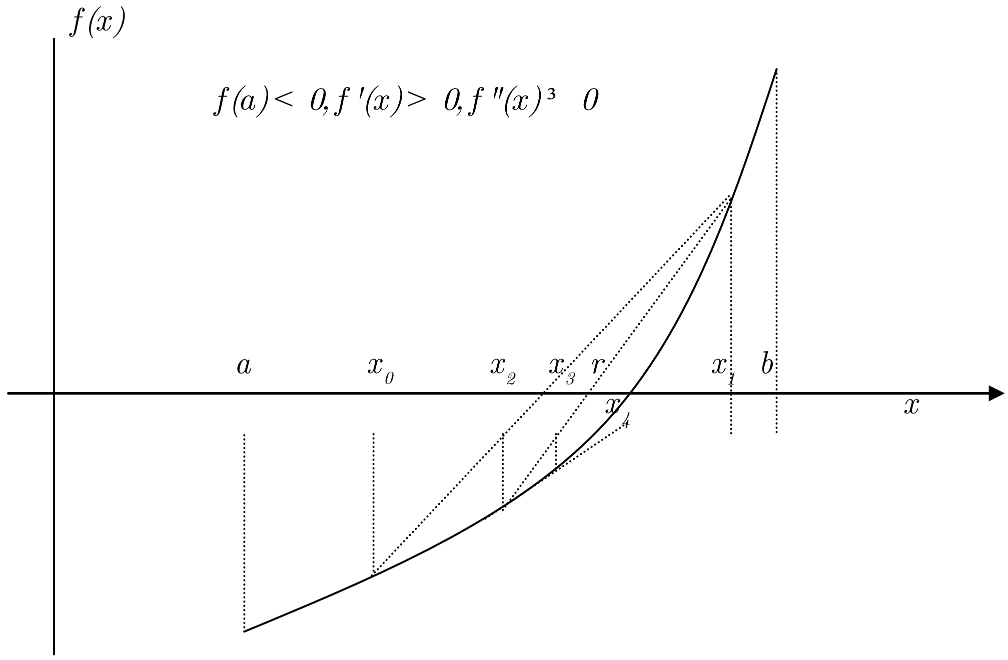
Jadi, selisih $x_{n+1} - x_n$ dapat digunakan sebagai estimasi galat hampiran ke-n, $E_n = r - x_n$.

Syarat-syarat pada Teorema 4 juga merupakan syarat cukup untuk menjamin konvergensi iterasi Tali Busur (Conte & de Boor, 1981: 106). Dalam hal ini kedua hampiran awal $x_0, x_1 \in [a,b]$. Dengan memperhatikan kembali penjelasan setelah Teorema 4, misalkan $f(a) < 0$ dan $f''(x) \geq 0$ pada [a, b] (lihat Gambar 5). Dari iterasi Tali Busur

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1),$$

(i) jika $r \leq x_0, x_1 \leq b$, maka $r \leq x_2 < min(x_0, x_1)$, sehingga iterasinya akan konvergen secara monoton turun ke r;

(ii) jika $a \leq x_0 \leq r$ dan $r \leq x_1 \leq b$, maka $x_2 < x_3 \leq r$, dan $r \leq x_4 < x_1$, sehingga iterasinya akan konvergen secara mengitari r di satu sisi sekali dan di sisi lain dua kali.



Gambar 5 Iterasi Tali Busur pada fungsi cekung dengan turunan monoton

F. Implementasi Metode Newton-Raphson dan Tali Busur

Permasalahan utama di dalam mengimlementasikan algoritma iterasi adalah penentuan kriteria penghentian iterasi. Terdapat beberapa kriteria yang dapat digunakan, yakni:

1. Menggunakan galat mutlak: $E_n = |r - x_n| < e$;
2. Menggunakan estimasi galat mutlak, yakni selisih dua hampiran: $|x_{n+1} - x_n| < e$;

3. Menggunakan estimasi galat relatif: $\frac{2|x_n - x_{n-1}|}{|x_n| + |x_{n-1}|} < e$ (Mathews, 1992: 69);

4. Menggunakan estimasi galat Atkinson (46): $\left|\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}}\right| < e$;

5. Menggunakan nilai fungsi: $|f(x_n)| < d$;

dengan e dan d adalah batas-batas toleransi yang diberikan.

Pemakaian kriteria 1 memerlukan pengetahuan nilai akar r, yang belum tentu diketahui karena nilai inilah yang hendak dicari. Pemakaian kriteria 2 belum tentu menjamin iterasinya konvergen ke akar r, karena boleh jadi x_{n+1} sangat dekat dengan x_n namun keduanya belum cukup dekat dengan r (Kasus ini terjadi jika kemiringan kurva cukup terjal pada interval yang sangat sempit). Selain kemungkin tersebut, kriteria ini memerlukan dilakukannya iterasi sekali lagi, sebelum dihentikan. Kriteria 3 dan 4 cukup mudah dipakai dan cukup menjamin konvergensi. Sekalipun permasalahan pokoknya adalah mencari nilai x yang memenuhi $f(x) = 0$, sehingga kriteria 5 harus dipenuhi, namun pemakaian kriteria ini secara mandiri dapat memberikan hasil yang berbeda-beda. Hal ini terjadi jika kurva $y = f(x)$ berdekatan dengan sumbu-x pada interval yang cukup lebar di sekitar akar. Oleh karena itu dapat dipakai beberapa kriteria sekaligus untuk menghentikan iterasi.

Conte dan de Boor (1981: 86) menyarankan pemakaian selisih dua hampiran berturutan dan kriteria 5 untuk menghentikan iterasi. Kedua kriteria ini sering dipakai pada metode Newton dan metode Tali Busur. Kriteria 5 diperlukan pada metode Tali Busur untuk menghindari terjadinya pembagian dengan nol. Kriteria selisih dua hampiran terakhir diperlukan pada kedua metode, karena selisih ini dapat dipakai sebagai batas konservatif untuk galat hasil iterasi terakhir, apabila sudah cukup dekat ke akar yang hendak dicari [lihat (44)].

Program MATLAB yang mengimplementasikan algoritma Newton (**nrsym.m**) dan Tali Busur (**talibusur**) disajikan pada Lampiran C. Untuk perbandingan juga disusun program yang mengimplementasikan metode Newton termodifikasi (**mnrsym.m**) untuk akar ganda. Pada program-program MATLAB tersebut digunakan kriteria selisih kedua hampiran terakhir, hampiran galat relatif iterasi terakhir, dan nilai fungsi. Untuk menghindari pembagian dengan nol pada perhitungan galat relatif tersebut digunakan nilai **eps** (= 2.2204×10^{-16}), yang pada MATLAB merupakan nilai keakuratan relatif titik mengambang (*floating point relative accuaracy*). Untuk mengetahui perilaku fungsi di sekitar hampiran awal, program **nrsym.m** dan **mnrsym.m,** selain melakukan iterasi juga menghasilkan gambar kurva fungsi dan turunannya.

Penggunaan program-program MATLAB tersebut memerlukan masukan berupa fungsi (harus), derajad akar (khusus dan wajib untuk program Newton termodifikasi), hampiran awal (harus program **talibusur**, opsional untuk program **nrsym** dan **mnrsym**), batas toleransi galat opsional), dan maksimum iterasi dilakukan (opsional), serta parameter untuk menentukan format tampilan hasil. Pada program Newton tidak diperlukan masukan turunan fungsi, karena program akan menghitung sendiri turunan fungsi yang diberikan. Fungsi dapat dituliskan dalam bentuk ekspresi (rumus) atau variabel yang menyimpan ekspresi tersebut. Apabila masukan opsional tidak diberikan, program akan menggunakan nilai-nilai *default*, yakni hampiran awal $x_0 = 0$, batas toleransi $d = 10^{15}$ dan maksimum iterasi $N = 50$. Petunjuk selengkapnya sudah dituliskan di dalam program, yang dapat ditampilkan dengan menuliskan perintah **help *nama_program*.**

Pemilihan hampiran awal dan nilai batas toleransi dapat mempengaruhi konvergensi iterasi. Pada metode Tali Busur, urutan nilai x_0 dan x_1 juga mempengaruhi kekonvergenan iterasinya. Di depan sudah diuraikan beberapa syarat cukup untuk menentukan hampiran awal agar iterasi Newton maupun iterasi Tali Busur konvergen. Akan tetapi, syarat-syarat tersebut hanyalah merupakan syarat cukup, tidak merupakan syarat perlu, sehingga pemakaian hampiran awal yang tidak memenuhi syarat-syarat pada Teorema 3 maupun Teorema 4 boleh jadi akan menghasilkan iterasi yang konvergen. Di sinilah perlunya dilakukan eksperimen (perhitungan secara numerik) dengan menggunakan program-program yang telah disusun. Eksperimen juga dapat digunakan untuk memverifikasi hasil-hasil analisis di atas.

G. Hasil-hasil Eksperimen

Eksperimen komputasi dengan menggunakan program-program yang telah disusun dilakukan pada fungsi-fungsi di bawah ini.

1. $f(x) = x^6 - x - 1$ (Atkinson, 1993: 63, 80)
2. $f(x) = e^x - 3$ (Conte & de Boor, 1981: 106)
3. $f(x) = x + e^{-Bx^2} \cos(x), \quad B = 1, 2, 5, 10, 25, 50$. (Atkinson, 1993: 77)
4. $f(x) = (x - 1)^3$ (Atkinson, 1993: 67, 78) → akar tripel
5. $f(x) = (x - 1.1)^3 (x - 2.1)$. (Atkinson, 1993: 95)
6. $f(x) = (x - 1)(e^{x-1} - 1)$. → akar dobel
7. $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$. (Conte & de Boor, 1981: 105; Atkinson, 1993: 67)
8. $f(x) = xe^{-x}$. (Mathews, 1992: 79, 88) → NR divergen pada interval tertentu

Berikut disajikan beberapa tabel hasil eksperimen dengan metode Newton dan Tali Busur pada fungsi-fungsi di atas. Untuk kasus akar ganda juga disajikan hasil komputasi dengan metode Newton termodifikasi. Tabel 1 dan 2 menyajikan contoh proses iterasi yang konvergen. Tabel 3 – 10 menyajikan ringkasan iterasi metode-metode tersebut dengan hampiran awal yang berbeda-beda. Jika tidak dicantumkan, semua eksperimen menggunakan batas toleransi 10^{-15}. Pada hasil-hasil perhitungan tersebut notasi dalam bentuk **xe-m** berari $x \times 10^{-m}$.

Tabel 1. Iterasi Newton-Raphson untuk $x^6 - x - 1 = 0$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$	$r - x_{n-1}$.
0	0	-1	0	-0.778089598678601
1	-1	1	1	0.221910401321399
2	-0.857142857142857	0.253712313746823	-0.142857142857143	0.0790532584642561
3	-0.789951850459548	0.032950424213666	-0.0671910066833093	0.0118622517809468
4	-0.77837271113595	0.000768013750394037	-0.0115791393235981	0.000283112457348689
5	-0.778089761192171	4.4060599257989e-007	-0.000282949943779022	1.6251356971253e-007
6	-0.778089598678655	1.4521717162097e-013	-1.62513516092177e-007	5.36237720893951e-014
7	**-0.778089598678601**	2.22044604925031e-016	-5.35620693085042e-014	1.11022302462516e-016
8	**-0.778089598678601**	-1.11022302462516e-016	-8.18991885451312e-017	0

Tabel 2. Iterasi Tali Busur untuk $x^6 - x - 1 = 0$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$	$r - x_{n-1}$.
0	0.5	-1.484375	0.5	0.634724138401519
1	1	-1	0.5	0.134724138401519
2	2.03225806451613	67.4164663154789	-1.03225806451613	-0.89753392611461
3	1.01508785998617	-0.921076572187292	1.01717020452996	0.119636278415354
4	1.02879762486401	-0.843084252905465	-0.0137097648778443	0.10592651353751
5	1.17699794748527	0.481609597875833	-0.148200322621259	-0.0422738090837491
6	1.12311780171378	-0.116097036290738	0.0538801457714904	0.0116063366877412
7	1.1335833459815	-0.0117037280105632	-0.0104655442677247	0.00114079242001663
8	1.13475665762005	0.000334571947768536	-0.00117331163855086	-3.25192185341994e-005
9	1.13472404860037	-9.23840647315544e-007	3.260901967954e-005	8.98011454086856e-008
10	1.13472413839446	-7.26192439515216e-011	-8.97940865111349e-008	7.05879799056675e-012
11	**1.13472413840152**	-8.88178419700125e-016	-7.05889193264087e-012	0
12	**1.13472413840152**	-8.88178419700125e-016	-8.63345359103576e-017	0

Tabel 3 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $x^6 - x - 1 = 0$

Metode Newton			**Metode Tali Busur**			
x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
0	-0.778089598678601	8	0	1	gagal	-
0.7	1.1347241384015194	35	0	1.1	1.1347241384015194	10
0.8027	1.1347241384015194	11	-1	1	gagal	-
1.1	1.1347241384015194	5	1	-1	-0.77808959867860106	13
3	1.1347241384015194	11	-0.5	1.5	-0.77808959867860106	14
7	1.1347241384015194	16	0.5	1	1.13472413840152	12
-1.5	-0.77808959867860106	9	1	1.2	1.1347241384015194	9
1.2	1.1347241384015194	6	-1	0	-0.77808959867860106	12

Kurva $y = x^6 - x - 1$ hampir datar (gradiennya mendekati nol) di sekitar $x = $ **0.7** dan hampir tegak pada interval $x>$**1** dan $x<$**-1**. Persamaan $x^6 - x - 1 = 0$ mempunyai dua buah akar nyata, yakni

$$r_1 = -0.77808959867860109788068230965929 \approx -0.778, \quad dan$$
$$r_2 = 1.13472413840151949260544605445065 \approx 1.135.$$

Jika $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$, $g(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$, maka $|g'(x)| < 1$ untuk $x < d_1\ atau\ x > d_2$ de-ngan

$$d_1 = 0.38414468140916746824964645853990 \approx 0.384$$
$$d_2 = 1.01373683673021298942664301652 40 \approx 1.014.$$

Dalam kasus ini, jika $|x_0 - r_1| < r_1 - d_1$ atau $|x_0 - r_2| < r_2 - d_2$, yakni $-1.940 < x_0 < 0.384$ atau $1.014 < x_0 < 1.256$, maka iterasi Newton maupun Tali Busur akan konvergen. Naum hal ini tidak berarti bahwa untuk hampiran awal di luar interval-interval tersebut iterasinya pasti tidak konvergen.

Tabel 4 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $e^x - 3 = 0$

Metode Newton			Metode Tali Busur			
x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
0	1.0986122886681098	7	0	2	1.0986122886681098	10
1	1.0986122886681098	5	0	-1	1.0986122886681098	15
10	1.0986122886681098	14	-5	-4	gagal	4
-3	gagal	50	10	11	1.0986122886681098	21
-1	1.0986122886681098	11	0	1	1.0986122886681098	8
0.5	1.0986122886681096	6	0.5	1	1.0986122886681098	7
1.7	1.0986122886681098	6	0.5	1.5	1.0986122886681098	9
1.8	1.0986122886681098	5	1	1.5	1.0986122886681098	7

Persamaan $e^x - 3 = 0$ mempunyai penyelesaian (akar) $r = ln(3) \approx 1.0986.$ Di sini, $|g'(x)| < 1$ untuk $x > ln(3/2)$. Jadi, jika $|x_0 - r| < r - ln(3/2)$ atau $0.406 < x_0 < 1.792$, maka iterasinya akan konvergen.

Tabel 5 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $x + e^{-Bx^2}\cos(x) = 0$

B	Metode Newton			Metode Tali Busur			
	x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
1	0	-0.588401776500996	6	0	1	-0.58840177650099634	10
	0.5	-0.588401776500996	8	-0.5	0.5	-0.58840177650099623	8
	-0.5	-0.58840177650099634	4	-1	1	-0.58840177650099634	10
2	0	-0.513732724126289	7	0	1	-0.51373272412628945	10
5	0	-0.404911548209309	9	0	1	-0.40491154820930919	12
10	0	Gagal (berputar-putar)	50	0	1	-0.32640201009749875	13
	-0.5	-0.32640201009749875	6	-1	1	-0.32640201009749875	14
	-0.25	-0.32640201009749875	5	-0.5	-0.2	-0.32640201009749875	8
	0.25	-0.32640201009749875	9	0.2	0.25	-0.32640201009749875	15
25	0	Gagal (berputar-putar)	50	0	1	-0.23743624390627779	15
50	0	Gagal (berputar-putar)	50	0	0.5	-0.18329133329448488	19
	1	Gagal (berputar-putar)	50	0	1	Gagal (tali busur datar)	-
	-0.3	-0.183291333294485	7	0.5	1	-0.18329133329448488	18
	0.3	-0.183291333294485	6	-0.5	0.5	-0.18329133329448488	19
	-0.5	Gagal (berputar-putar)	-	0.5	-0.5	-0.18329133329448488	13

Untuk kasus B=1, kurvanya berupa garis lurus dengan gradien 1 di luar interval [**-1.8366, 1.8366**]. Semakin besar nilai $\boldsymbol{B}$, semakin kecil interval tersebut. Untuk semua nilai $\boldsymbol{B}$, kurva melengkung ke atas secara tidak simetris (menceng ke kanan) di dalam interval yang sesuai dengan titik balik semakin mendekati ke $(\mathbf{0,1})$ semakin besar nilai $\boldsymbol{B}$. Gradien di titik $(\mathbf{0,1})$ sama dengan 1. Semakin besar nilai $\boldsymbol{B}$, akarnya semakin mendekati nol dari kiri. Untuk kasus $\boldsymbol{B}$=10 akarnya adalah $r = -0.32640201009749872199953005910687 \approx -0.3264$. Dari hasil perhitungan diperoleh, $|g'(x)| < 1$ jika $x < -0.6330$, $-0.5220 < x < -0.116746$, $0.1904 < x < 0.25$, atau $x > 0.6962$. Jadi jika x_0 pada interval-interval tersebut, iterasinya akan konvergen.

Tabel 6 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $(x - 1)^3 = 0$

Batas toleransi (d)	Metode Newton			Metode Tali Busur			
	x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
1e-15	0	Gagal (sangat lambat)	50	0	2	1	2
	1.25	1.0000000000000013	81	2	0	1	2
	1.5	1.0000000000000018	82	-0.5	1.5	1.0000000000000029	118
	5	1.000000000000002	87	-1	5	0.99999999999999756	123
1e-10	0	0.99999999986231403	56	-5	5	1.0000000002456972	83
	1	Gagal (titik belok kurva)	-	3	-3	1.0000000002475697	82
	1.5	1.0000000001548968	54	-1	1	1	2
	5	1.0000000001631835	59	-1.5	1.5	1.0000000003064302	77

Persamaan $(x - 1)^3 = 0$ mempunyai akar $r = 1$, yang berderajad 3. Iterasi Newton cukup lambat. Dengan menggunakan rumus Newton termodifikasi, iterasinya akan konvergen ke akar tersebut pada iterasi ke-1, berapapun hampiran awal x_0 yang dipakai (asalkan berhingga). Hal ini dikarenakan rumus iterasi Newton termodifikasi adalah $x_n = 1$.

Tabel 7 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $(x - 1.1)^3(x - 2.1) = 0$

x_0	Metode Newton		Modifikasi Newton		Metode Tali Busur			
	Konvergen ke	Pada iterasi ke	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
0	1.0999999999999985	85	1.1000000000000001	5	0	1	1.0999999999999968	112
1	1.0999999999999981	78	1.1000000000000001	4	1	2	1.0999999999999972	113
1.5	1.1000000000000016	81	1.1000000000000001	5	1	1.5	1.0999999999999972	113
1.75	1.1000000000000016	79	1.1000000000000001	6	-1	5	1.099999999999997	130
3	2.1000000000000001	8	Gagal (berputar-putar)	500	1.5	3	1.1000000000000034	117
2	2.1000000000000001	6	Gagal (berputar-putar)	500	2	3	2.1000000000000001	10
-3	1.0999999999999983	89	1.1000000000000001	6	3	2	2.1000000000000001	9
5	2.1000000000000001	11	Gagal (berputar-putar)	500	2.5	3	2.1000000000000001	11

Persamaan $(x-1.1)^3(x-2.1)=0$ mempunyai akar berderajad tiga r=**1.1** dan akar sederhana r=**2.1**. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa $|g'(x)|<1$ jika

x<**1.6863365823230057140504268859383** atau x> **2.0136634176769942859495731140617.**

Jadi, iterasi Newton dan Tali Busur konvergen apabila x_0 pada interval-interval tersebut, meskipun iterasi Newton termodifikasi belum tentu konvergen (khususnya jika hampiran awal lebih dekat ke akar sederhana).

Tabel 8 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $(x-1)(e^{x-1}-1)=0$

x_0	Metode Newton		Modifikasi Newton		Metode Tali Busur			
	Konvergen ke	Pada iterasi ke	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
0	0.99999999999999956	50	1	5	0	2	0.99999999999999845	75
-1	0.99999999999999933	50	1	6	-3	-1	0.99999999999999867	71
2	1.0000000000000009	51	1	5	2	3	1.0000000000000013	74
-2	0.99999999999999944	50	1	7	3	2	1.0000000000000018	73

Persamaan $(x-1)(e^{x-1}-1)=0$ mempunyai sebuah akar r=1, yang merupakan akar dobel. Untuk kasus ini berlaku $|g'(x)|<1$ untuk semua x riel, sehingga iterasinya akan konvergen berapapun hampiran awal, asalkan berhingga. Sudah tentu semakin jauh hampiran awal dari akar tersebut, semakin lambat iterasi akan konvergen.

Tabel 9 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $e^{-x}-\sin(x)=0$

Metode Newton			Metode Tali Busur			
x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
0	0.58853274398186106	5	0	1	0.58853274398186106	9
0.6	0.58853274398186106	3	1	3	3.0963639324106462	7
1	0.58853274398186106	5	1	2	0.58853274398186106	11
2	25.132741228730506 *	500	4	5	18.849555928051171	14
1.75	182.21237390820801	6	0	5	Gagal **	19
3	3.0963639324106462	4	3	5	3.0963639324106462	8
4	3.0963639324106462	6	3	0	3.0963639324106462	10
5	9.4246972547385219	7	2	0	0.58853274398186106	9

*) gradien kurva di titik tsb. -1, iterasinya dilaporkan belum konvergen
**) dilaporkan "Stop, tali busur datar pada [34.557519189487728,34.557519189487728]"

Fungsi $f(x)=e^{-x}-\sin(x)$ semakin lama semakin periodik, mendekati $-\sin(x)$, akarnya semakin ke kanan semakin mendekati kelipatan p.

Tabel 10 Perbandingan iterasi NR dan TB untuk $xe^{-x} = 0$

Metode Newton			Metode Tali Busur			
x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke	x_0	x_1	Konvergen ke	Pada iterasi ke
1	Gagal (titik balik kurva)	-	1	2	Gagal (mejauh ke kanan)	50
2	Gagal (menjauh ke kanan)	50	1	0.5	8.0832358286701146e-028	13
0.2	0	6	2	0.1	2.0433731523959695e-029	10
0.5	0	8	2	-1	Gagal (menjauh ke kanan)	50
-2	0	9	2	-0.1	-3.2976080656589354e-028	10
0.35	0	7	0	0.3	0	2
0.3	0	7	-2	0.35	7.6407132803448688e-038	7
-3	0	11	-2	-1	-4.513898307157584e-036	12

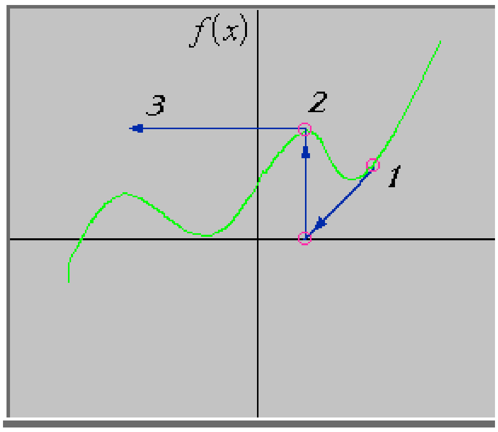
Untuk fungsi ini, $|g'(x)| < 1$ jika $\boldsymbol{x < 0.3718}$, sehingga iterasinya akan konvergen jika hampiran awalnya pada interval tersebut.

Bab V
Kesimpulan dan Saran

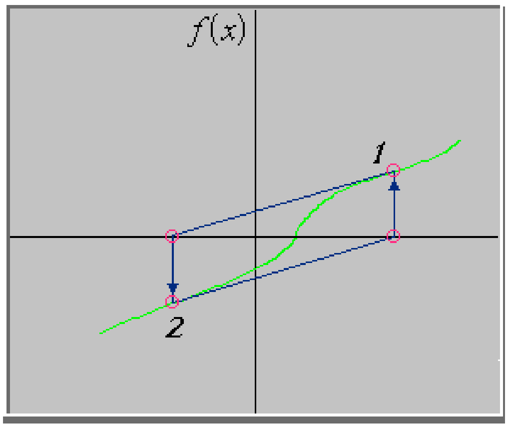
A. Metode Newton – Raphson (NR):

Berikut adalah beberapa kesimpulan yang diperoleh dari penyelidikan metode Newton – Raphson (NR).

1. Metode NR konvergen secara **kuadratik**. Di dekat akar (sederhana), cacah digit akurat menjadi dua kali lipat pada setiap langkah. Sifat kekonvergenannya yang sangat cepat ini menjadikan metode NR sebagai metode pilihan untuk fungsi-fungsi yang turunannya mudah dihitung, dan fungsi turunannya kontinyu di dekat akar yang hendak dicari.
2. Metode NR memerlukan perhitungan nilai turunan fungsi, yang tidak selalu mudah dihitung, misalnya jika fungsinya hanya diketahui dari data nilai-nilainya, tidak dinyatakan dengan rumus eksplisit. Meskipun demikian, dalam pemrograman dengan MATLAB, perhitungan turunan fungsi dapat dilakukan secara simbolik oleh MATLAB, sehingga tidak perlu dihitung secara manual.
3. Syarat **cukup** namun **tidak perlu** agar metode NR konvergen dinyatakan pada Teorema 3 dan Teorema 4.



(a)



(b)

Gambar 6 Situlasi penyebab kegagalan iterasi Newton-Raphson

4. Metode NR tidak akan konvergen jika:
   a. Hampiran awal berupa titik ekstrim fungsi – iterasinya menjauh dari akar (Gambar 6 (a)).
   b. Garis singgung kurva di titik awal sejajar dengan kurva pada arah perpotongannya dengan sumbu-x, iterasinya berputar-putar (Gambar 6 (b)).
   c. Kurvanya turun/menjauhi akar ke kanan/kiri dan mendekati sumbu-x secara asimptotik (contoh: $f(x) = xe^{-x}$, $x>1$).

5. Metode NR cukup lambat konvergen atau tidak stabil jika:
   a. digunakan untuk menghampiri akar ganda;
   b. hampiran awal cukup jauh dari akar yang dituju;
   c. kurvanya "landai" di sekitar akar ($|f'(x)|$ → 0 di sekitar r, $f(r)=0$);
   d. kurvanya "tegak" pada interval yang "jauh" dari akar ($|f'(x)|>>1$ untuk $|x-r|>>>0$, $f(r)=0$);
6. Ringkasan kekuatan dan kelemahan metode Newton-Raphson disajikan pada tabel berikut ini.

Kekuatan	**Kelemahan**
Rumus iterasi dapat diperoleh dari deret Taylor maupun pendekatan grafis (garis singgung).	Pemilihan hampiran awal mungkin tidak dapat dilakukan secara sebarang.
Secara lokal, laju kekonvergenan bersifat kuadratik jika hampiran dekat ke akar (sederhana).	Laju kekonvergenan tidak dijamin jika hampiran awal tidak dekat ke akar.
Ada kemungkinan laju kekonvergenan lebih cepat daripada kuadratik.	Metode NR mungkin tidak konvergen.
Galat hampiran dapat diestimasi.	Metode NR mungkin konvergen secara pelan.
Mudah diimplementasikan, dengan MATLAB fungsi turunan tidak perlu dihitung secara manual.	Memerlukan perhitungan nilai fungsi dan turunannya pada setiap iterasi.
Sangat efisien jika dipakai untuk mencari akar polinomial.	Pemilihan kriteria penghentian iterasi tidak jelas.
Dapat dimodifikasi untuk mendapatkan laju kekonvergenan kuadratik ke akar ganda.	Memerlukan pengetahuan tentang derajad akar, yang belum tentu dapat diketahui di awal.

B. Metode Tali Busur (TB)

Beberapa kesimpulan yang diperoleh dari penyelidikan metode Tali Busur (*Secant*) adalah sebagai berikut.

1. Metode TB mirip dengan metode posisi palsu (*regular falsi*) dalam dua hal:

   Keduanya memerlukan hampiran awal x_1 dan x_2 dan keduanya menggunakan rumus yang sama untuk mendapatkan hampiran berikutnya, yakni

$$x_3 = x_3 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f\left(x_1\right)} f(x_1)$$

Akan tetapi, metode TB dan metode posisi palsu berbeda dalam tiga hal:

a. Pada metode posisi palsu, interval $[x_1, x_2]$ selalu memuat akar yang hendak dicari (yakni berlaku $f(x_1)f(x_2) < 0$), sedangkan pada metode TB interval $[x_1, x_2]$ belum tentu memuat akar (belum tentu berlaku $f(x_1)f(x_2) < 0$).

b. Pada metode posisi palsu, nilai x_3 digunakan untuk mengganti nilai x_1 atau x_2, tergantung tanda nilai $f(x_3)$, yakni

$$x_1 = x_3 \text{ jika } f(x_1)f(x_3) > 0,$$
atau
$$x_2 = x_3 \text{ jika } f(x_2)f(x_3) > 0,$$

sedangkan pada metode TB penggantian nilai dilakukan dengan rumus $x_1 = x_2$ dan $x_2 = x_3$.

c. Metode posisi palsu pasti konvergen (seperti metode bagi dua), meskipun mungkin sangat lambat, sedangkan metode TB belum tentu konvergen – khususnya jika fungsi bersifat **osilatif** (naik-turun) di sekitar akar yang hendak dicari.

2. Di dekat akar (sederhana), metode TB menghasilkan hampiran yang memiliki angka akurat hampir dua kali lipat angka akurat hampiran sebelumnya.
3. Apabila metode TB menuju konvergen, maka laju kekonvergenannya semakin cepat, karena metode ini hanya menggunakan data terakhir. Sebaliknya, jika metode TB dimulai tidak konvergen, maka akan menjadi semakin jelek iterasinya (semakin menjauhi akar sesungguhnya).

7. Metode TB tidak akan konvergen jika nilai fungsi di kedua hampiran awal sama, yakni tali busurnya sejajar sumbu-x ($f(x_0) = f(x_1)$)

8. Metode TB cukup lambat konvergen jika:

   a. digunakan untuk menghampiri akar ganda;

   b. kurvanya "landai" di sekitar akar ($|f'(x)| \to 0$ di sekitar r, $f(r)=0$);

   c. kurvanya "tegak" pada interval yang "jauh" dari akar ($|f'(x)| >> 1$ untuk $|x-r| >>> 0$, $f(r)=0$);

4. Urutan nilai x_0 *dan* x_1 menentukan ke mana iterasi konvergen (jika konvergen).

5. Jika $|f'(x)| >> 0$, maka iterasi TB akan konvergen, asalkan $f'(x)$ tak berganti tanda dan kurvanya memotong sumbu-x.

6. Ringkasan kekuatan dan kelemahan metode Tali Busur disajikan pada tabel berikut ini.

Kekuatan	**Kelemahan**
Tidak memerlukan perhitungan turunan	Memerlukan dua hampiran awal
Secara lokal, laju kekonvergenannya super-linier jika sudah dekat ke akar yang dicari .	Kekonvergenan tidak dijamin untuk iterasi yang jauh dari akar yang dicari.
Galat hampiran dapat diestimasi	Kekonvergenannya mungkin lambat atau tidak sama sekali.
Lebih mudah diimplementasikan daripada metode Newton.	Laju kekonvergenannya tidak secepat metode Newton.
Dua langkah iterasi metode TB hampir setara dengan satu langkah iterasi Newton.	Kriteria penghentian iterasi tidak jelas.

Pada MATLAB terdapat fungsi **fzero** yang dapat digunakan untuk mencari hampiran akar persamaan di "dekat" suatu hampiran awal yang diberikan. Fungsi **fzero** tersebut menggunakan metode pengapitan akar. Metode pengapitan akar bersifat konvergen secara global, asalkan interval awalnya memuat akar. Ini artinya bahwa untuk menjamin kekonvergenannya (meskipun mungkin lambat), hampiran awal tidak harus dekat dengan akar yang dicari. Di sisi lain, metode Newton dan Tali Busur bersifat konvergen secara lokal, artinya kekonvergenannya dipengaruhi oleh pemilihan hampiran awal. Metode **hibrida** menggabungkan kedua sifat tersebut, iterasi dimulai dengan metode yang konvergen secara global, kemudian setelah diperoleh hampiran yang cukup dekat dengan akar digunakan metode yang konvergen secara lokal (Mathews, 1992: 65 - 66).

Masalah-masalah yang mungkin timbul:

1. Kurva mendekati sumbu-x pada interval yang cukup lebar di sekitar akar ganda;
2. Akar merupakan titik ekstrim (maksimum/minimum lokal);
3. Hampiran awal cukup jauh dari akar;
4. Akar kompleks;

C. Saran-saran

Baik metode Newton-Raphson maupun metode Tali Busur sebaiknya tidak dipakai secara mandiri. Hal ini dikarenakan pemilihan hampiran awal pada kedua metode sangat berpengaruh terhadap kekonvergenannya. Untuk menjamin kekonvergenan kedua metode dapat dipakai metode **hibrida** (metode campuran), yakni:

1. Iterasi dimulai dengan metode stabil (misalnya metode Bagi Dua atau metode Posisi Palsu).
2. Setelah dekat ke akar digunakan metode TB atau NR untuk mempercepat iterasi dan memperoleh hampiran yang lebih akurat

Salah satu cara adalah menggabungkan algoritma yang dipakai pada fungsi MATLAB **fzero** dan algoritma NR atau TB yang telah dibahas dalam penelitian ini. Permasalahannya adalah bahwa pada fungsi MATLAB **fzero** tidak dilakukan perhitungan turunan, sedangkan pada metode NR (dan modifikasi NR) diperlukan perhitungan turunan. Hal ini membuat pemrograman menjadi cukup rumit, terlebih dengan adanya keterbatasan MATLAB. Pertimbangan lain yang perlu diperhatikan adalah kriteria kapan metode "lokal" dipakai. Dalam hal ini dapat digunakan kriteria pada Teorema 3 atau Teorema 4.

Oleh karena penelitian ini hanya dibatasi pada fungsi-fungsi satu variabel, maka penelitian ini dapat diteruskan ke fungsi-fungsi dua atau tiga variabel. Masalah ini lebih rumit daripada masalah pencarian akar fungsi satu variabel. Kajian kedua metode pada fungsi-fungsi multivariabel merupakan tantangan yang menarik untuk dikaji lebih lanjut.

Permasalahan lain yang cukup menarik adalah penerapan metode numerik untuk mencari hampiran akar kompleks. Kedua metode yang telah dikaji tidak secara langsung dapat menghasilkan hampiran akar kompleks. Demikian pula, pemakaian metode NR untuk fungsi polinomial yang dapat diubah ke bentuk binomial akan lebih efisien jika dilakukan modifikasi rumus perhitungan.

Daftar Pustaka

Atkinson, Kendal (1993). *Elementar Numerical Analysis*. second edition. John Wiley & Sons, Singapore.

Borse, G.J (1997). *Numerical Methods with MATLAB, A Resource for Scientiests and Engineers*. PWS Publishing Company, Boston.

Conte, Samuel D. & Carl de Boor (1981). *Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach*. 3rd edition. McGraw-Hill Book Company, Singapore

Gerald, Curtis F. & Patrick O. Wheatly (1994). *Applied Numerical Analysis*. 5th edition. Addison-Wisley Pub. Co., Singapore

Jacques, Ian & Colin Judd (1987). *Numerical Analysis*. Chapman and Hall, New York.

Mathews, John H (1992). *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*. second edition. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York.

Scheid, Francis (1989). *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Numerical Analysis*. 2/ed. McGraw-Hill Book Company, Singapore.

Volkov, E. A (1990). *Numerical Methods*. Hemisphere Publishing Company, New York.

Lampiran

A. Bukti lain (54) :

Untuk hampiran-hampiran x_{n-1} *dan* x_n yang sangat dekat dengan r, faktor $K_n = \frac{-f''(\xi)}{2f''(\zeta)}$ pada (50) dapat diganti dengan $\frac{-f''(r)}{2f'(r)} \equiv K$, asalkan $f'(r) \neq 0$ (r merupakan akar sederhana), sehingga galat (50) dapat dituliskan sebagai

$$|E_{n+1}| = |K||E_n||E_{n-1}|, \quad n \geq 1 \tag{55}$$

Sekarang didefinisikan sebuah barisan $\{B_n\}$ dengan

$$B_n = |K||E_n|, \quad n \geq 0. \tag{56}$$

Agar hampiran x_n *konvergen ke* r, haruslah dipenuhi B_n konvergen ke nol. Dari (55) diperoleh hubungan

$$B_{n+1} = B_n B_{n-1}, \; n \geq 2. \tag{57}$$

Untuk menjamin $B_n \to 0$ *jika* $n \to \infty$, pilih $B_1 = B_2 = d$ *dengan* $0 < |d| < 1$. Dari (57) diperoleh $B_3 = d^2,\; B_4 = d^3,\; B_5 = d^5,\; B_6 = d^8, \ldots$, dan secara induktif dapat diperoleh rumus

$$B_n = d^{F_n}, \tag{58}$$

dengan $F_1 = F_2 = 1$ *dan* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\; n \geq 3$. Jadi F_n merupakan barisan *Fibonacci*.

Dapat ditunjukkan dengan mudah (lihat Lampiran B) bahwa

$$F_n = \frac{\mu^n - \nu^n}{\sqrt{5}}, \tag{59}$$

dengan $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$ dan $\nu = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618034$. Dari (58) dan (59) diper-oleh bahwa

$$\frac{B_{n+1}}{B_n^{\mu}} = \frac{d^{F_{n+1}}}{d^{\mu F_n}} = d^{F_{n+1} - \mu F_n} = d^{\nu^n}.$$

Oleh karena $\nu^n \to 0$ *untuk* $n \to \infty$, maka $\frac{B_{n+1}}{B_n^{\mu}} \to 1$ *untuk* $n \to \infty$. Akan tetapi, dari definisi (56) kita tahu bahwa

$$\frac{B_{n+1}}{B_n^{\mu}} = \frac{|K||E_n|}{|KE_{n-1}|^{\mu}} = |K|^{1-\mu} \frac{|E_n|}{|E_{n-1}|^{\mu}}.$$

Akhirnya diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|E_{n+1}|}{|E_n|^{\mu}} = |K|^{\mu-1}\lim_{n\to\infty}\frac{B_{n+2}}{B_{n+1}^{\mu}} = |K|^{\mu-1} \approx |K|^{0,618034}\ .\ \blacksquare$$

B. Bukti (59)

Diketahui barisan Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$ *dan* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3$. *Akan ditunjukkan bahwa* $F_n = \dfrac{\mu^n - \nu^n}{\sqrt{5}}$, *dengan* $\mu = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$ *dan* $\nu = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618034$.

Mula-mula didefinisikan fungsi $G(x)$ sebagai berikut

$$G(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \dots. \tag{60}$$

Kalikan kedua ruas dengan x:

$$xG(x) = F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + F_4x^5 + \dots. \tag{61}$$

Kalikan kedua ruas dengan x^2:

$$x^2G(x) = F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + F_4x^6 + \dots. \tag{62}$$

Dari ketiga persamaan di atas diperoleh

$$\begin{aligned} G(x) - xG(x) - x^2G(x) &= F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \dots \\ &= 1x + 0x^2 + 0x^3 + \dots \\ &= x, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} - \frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\mu x} - \frac{1}{1-\nu x}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(1 + \mu x + \mu^2x^2 + \mu^3x^3 + \dots) - (1 + \nu x + \nu^2x^2 + \nu^3x^3 + \dots)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\mu - \nu)x + (\mu^2 - \nu^2)x^2 + (\mu^3 - \nu^3)x^3 + \dots\right] \end{aligned} \tag{63}$$

Dengan membandingkan suku-suku ruas kanan (60) dan (63) diperoleh (59). ∎

C. Program MATLAB

1. Program Iterasi Newton – Raphson

```
function hasil = nrsym(f,x0,delta,N,tabel)
%----------------------------------------------------------------------
% nrsym.m (Newton-Raphson) ditulis oleh Sahid (c) 2002-3
% Iterasi  Newton-Raphson untuk menghampiri akar persamaan f(x)=0
%                 f(x_n)
% x_{n+1} = x_n - ------, n= 0, 1, 2, ...
%                 f'(x_n)
% Contoh-contoh pemakaian:
%   nrsym('x^6-x-1',x0,delta,epsilon,N,1)
%   hasil = nrsym('cos(x)',0.1,delta,N);
%   f='cos(x)'; nrsym(f,1,1e-15,50);
%   syms x;f=exp(x)-sin(x); nrsym(f,1,1e-15,50);
%   nrsym('x^2*sin(x^2)-exp(x)');
%   f=inline('x^2*sin(x^2)-exp(x)');nrsym(f);
% Input:
%   f       : ekspresi atau variabel simbolik yang mendefinisikan f(x)
%   x0      : hampiran awal
%   delta   : batas toleransi kekonvergenan hampiran r
%   N       : maksimum iterasi
%   tabel   : format tampilan hasil (1=pakai tab -> tabel pada MS Word),
%             (tidak dipakai = dalam bentuk tabel)
% Output:
%   hasil      -> matriks penyimpan hasil-hasil iterasi, dengan kolom:
%   1: iterasi -> nomor urut iterasi
%   2: x       -> nilai-nilai hampiran
%   3: fx      -> nilai-nilai f(x)
%   4: galatx  -> selisih dua hampiran berturut-turut = x_n - x_{n-1}
%   5: E_n     -> galat hampiran ke-n
%---------------------------------------------------------------------
if nargin==0 error('Anda harus menuliskan fungsinya!');
   else
    if isa(f,'inline') % cek format masukan fungsi
       f=formula(f); df=diff(f);
       else if (isvarname(f) | isa(f,'function_handle'))
            error('Tidak boleh menggunakan nama fungsi!')
            else df=diff(f);
        end
    end
    if nargin<2, x0=0; delta=1e-15; N=50;      % Set nilai-nilai parameter
       else if nargin<3,   delta=1e-15; N=50;  % jika tidak diberikan
            else if nargin<4, N=50;
end;end;end;end
df=diff(f);        % hitung fungsi turunan ( f')
y1=subs(f,x0-2);y2=subs(f,x0+2);
ymin=-min(5,min(abs(y1),abs(y2)));
ymax=min(25,max(abs(y1),abs(y2)));
ezplot(df,[x0-2,x0+2]);grid on;hold on
% plot f'(x) dengan garis putus-putus
set(findobj(gca,'Type','line','Color',[0 0 1]),'lineStyle',':')
ezplot(f,[x0-2,x0+2]); hold off;    % plot f(x) dengan garis mulus
set(gca,'YLim',[ymin ymax])         % set batas-batas y yang sesuai
iterasi=0;
dx=x0;
fx= subs(f,x0);   % hitung f(x0)
hasil=[iterasi,x0,fx,dx];
for k=1:N,
  df0 = subs(df,x0);  % hitung nilai f'(x0)
```

```
  if df0==0,          % iterasi harus dihentikan jika f'(x0)=0
    if k>5, disp(num2str(hasil(k-5:k,:),17));
    else disp(num2str(hasil,18));end
    error(['Stop, bertemu garis singgung mendatar di x = ',num2str(x0),'!']);
    else  dx = fx/df0;
  end
  x = x0 - dx;         % hampiran berikutnya, x
  fx = subs(f,x);      % hitung f(x)
  err = abs(dx);       % beda dengan hampiran sebelumnya
  relerr = err/(abs(x)+eps);    % hampiran galat relatif
  hasil=[hasil;[k,x,fx,dx]];    % simpan hasilnya
  x0=x;
  iterasi=k;
  if ((err<delta|relerr<delta) & abs(fx)<delta)|fx==0,
    % iterasi konvergen -> tambahkan kolom r-x_n
    disp('Iterasi konvergen dengan hasil sebagai berikut:');
    r=hasil(iterasi+1,2);       % akar yang diperoleh
    if (nargin==6 & tabel==1),  % tampilkan hasil dengan pemisah kolom TAB
       hasil=sprintf('%d\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\n',hasil');
    else
    disp(num2str(hasil,18));    % atau tampilkan hasil dengan format tabel
    end
    break
    else if iterasi==N, disp('Iterasi mungkin tidak konvergen!'),
            disp('Berikut adalah hasil 6 iterasi terakhir:'),
            disp(num2str(hasil(iterasi-4:iterasi+1,:),18));
            error('Cobalah ulangi, dengan menambah maksimum iterasi! ')
        end
  end
end
```

2. Program Iterasi Tali Busur

```
function hasil = talibusur(f,x0,x1,delta,N,tabel)
%-----------------------------------------------------------------------
% talibususr.m ditulis oleh Sahid (c) 2002-3
% Iterasi  Tali Busur untuk menghampiri akar persamaan f(x)=0
%                   f(x_n)[x_n-x_{n-1}]
% x_{n+1} = x_n - --------------------,  n=1, 2, ...
%                   [f(x_n)-f(x_{n-1})]
% Contoh-contoh pemakaian (f adalan nama fungsi):
%   talibusur(@f,x0,x1,delta,N)
%   hasil=talibusur(@f,x0,x1,delta,N)
%   hasil=talibusur('exp(x)-3',3,2,1e-15,25)
%   ...
% Input:
%   f          nama fungsi yang mendefinisikan f(x)
%   x0         hampiran awal 1
%   x1         hampiran awal 2
%   delta      batas toleransi kekonvergenan hampiran r
%   N          maksimum iterasi
% Output:
%   hasil      -> matriks penyimpan hasil-hasil iterasi, dengan kolom:
%   1: iterasi -> nomor urut iterasi
%   2: x       -> nilai-nilai hampiran
%   3: fx      -> nilai-nilai f(x)
%   4: galatx  -> selisih dua hampiran berturut-turut = x_n - x_{n-1}
%   5: E_n     -> galat hampiran ke-n
%----------------------------------------------------------------------
if nargin<3,
    error('Anda harus menuliskan fungsinya dan kedua hampiran awal!');
   else
```

```
    if isvarname(f) % cek format masukan fungsi
       f = ezfcnchk(f);  else  f = fcnchk(f);
    end
    if nargin<4, delta=1e-15; N=50;  % Set nilai-nilai parameter
       else if nargin<5,      N=50;  % jika tidak diberikan
end;end;end
% fungsi masukan sudah tidak ada masalah --> algoritma dimulai ...
iterasi=0;
f0= feval(f,x0); f1=feval(f,x1);
hasil=[iterasi,x0,f0,x0;iterasi+1,x1,f1,x1-x0];
for k=2:N,
  if abs(f1-f0)==0,   % iterasi harus dihentikan jika f(x0)=f(x1)
      if k>5, disp(num2str(hasil(k-5:k,:),17));
      else disp(num2str(hasil,18));end
      error(['Stop, tali busur datar pada
[',num2str(x0,20),',',num2str(x1,20),']!']);
    else dx=f1*(x1-x0)/(f1-f0);
  end
  x = x1 - dx;          % hampiran berikutnya
  f0=f1;
  f1 = feval(f,x);      % hitung f(x1)
  err = abs(dx);        % beda dengan hampiran sebelumnya
  relerr = err/(abs(x)+eps);   % hampiran galat relatif
  hasil=[hasil;[k,x,f1,dx]];  % simpan hasilnya
  x0 = x1;   % hampiran sekarang sebagai titik awal hampiran berikutnya
  x1=x;
  iterasi=k;
  if ((err<delta|relerr<delta)& abs(f1)<delta)|f1==0,
     % tambahkan kolom r-x_n
    disp('Iterasi konvergen dengan hasil sebagai berikut:');
    r=hasil(iterasi+1,2);    % akar yang diperoleh
    hasil(:,5)=r-hasil(:,2); % kolom galat hampiran
    if (nargin==6 & tabel==1),% tampilkan hasil dengan pemisah kolom TAB
       hasil=sprintf('%d\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\n',hasil);
    else
    disp(num2str(hasil,18));  % atau tampilkan hasil dengan format tabel
    end
    break,
    else if iterasi==N, disp('Iterasi mungkin tidak konvergen!'),
            disp('Berikut adalah hasil 6 iterasi terakhir:'),
            disp(num2str(hasil(iterasi-4:iterasi+1,:),18));
            error('Cobalah ulangi, dengan menambah maksimum iterasi! ')
       end
  end
end
```

3. Program Iterasi Newton Termodifikasi untuk Akar Ganda

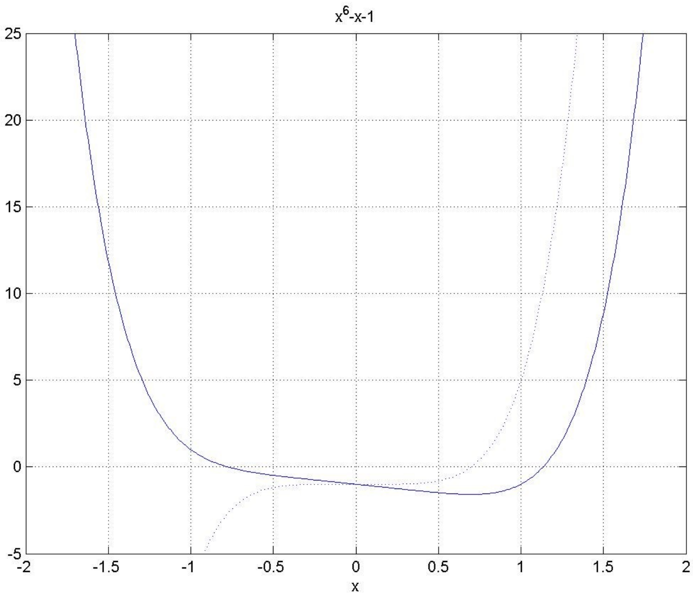
```
function hasil = mnrsym(f,m,x0,delta,N,tabel)
%-----------------------------------------------------------------------
% mnrsym.m (Modified Newton-Raphson) ditulis oleh Sahid (c) 2002-3
% Iterasi  Newton-Raphson termodifikasi untuk akar berderajad m dari f(x)=0
%                m*f(x_n)
% x_{n+1} = x_n - --------, n= 0, 1, 2, ...
%                f'(x_n)
% Contoh-contoh pemakaian:
%   mnrsym('(x-1)^3*(3*x+2)',3,x0,delta,epsilon,N,1)
%   hasil = mnrsym('cos(x)',2,0.1,delta,N);
%   f='cos(x)'; mnrsym(f,2,1,1e-15,50);
%   syms x;f=(x-1)*(exp(x-1)-1); mnrsym(f,2,1,1e-15,50);
%   mnrsym('x^2-4*x+4',2);
%   f=inline('(x-2)^4');mnrsym(f,4);
```

```
% Input:
%   f       : ekspresi atau variabel simbolik yang mendefinisikan f(x)
%   m       : derajad akar yang dicari
%   x0      : hampiran awal
%   delta   : batas toleransi kekonvergenan hampiran r
%   N       : maksimum iterasi
%   tabel   : format tampilan hasil (1=pakai tab -> tabel pada MS Word),
%             (tidak dipakai = dalam bentuk tabel)
% Output:
%   hasil      -> matriks penyimpan hasil-hasil iterasi, dengan kolom:
%   1: iterasi -> nomor urut iterasi
%   2: x       -> nilai-nilai hampiran
%   3: fx      -> nilai-nilai f(x)
%   4: galatx  -> selisih dua hampiran berturut-turut = x_n - x_{n-1}
%   5: E_n     -> galat hampiran ke-n
%----------------------------------------------------------------------
if nargin<=1 error('Anda harus menuliskan fungsi dan derajad akarnya!');
   else
    if isa(f,'inline') % cek format masukan fungsi
       f=formula(f); df=diff(f);
       else if (isvarname(f) | isa(f,'function_handle'))
            error('Tidak boleh menggunakan nama fungsi!')
            else df=diff(f);
        end
    end
    if m<=0|fix(m)~=m error('Salah menuliskan derajad akar!'); end
    if nargin<3, x0=0; delta=1e-15; N=50;      % Set nilai-nilai parameter
       else if nargin<4,   delta=1e-15; N=50;  % jika tidak diberikan
            else if nargin<5, N=50;
end;end;end;end
df=diff(f);       % hitung fungsi turunan ( f')
y1=subs(f,x0-2);y2=subs(f,x0+2);
ymin=-min(5,min(abs(y1),abs(y2)));
ymax=min(25,max(abs(y1),abs(y2)));
ezplot(df,[x0-2,x0+2]);grid on;hold on
% plot f'(x) dengan garis putus-putus
set(findobj(gca,'Type','line','Color',[0 0 1]),'lineStyle',':')
ezplot(f,[x0-2,x0+2]); hold off;    % plot f(x) dengan garis mulus
set(gca,'YLim',[ymin ymax])         % set batas-batas y yang sesuai
iterasi=0;
dx=x0;
fx= subs(f,x0);   % hitung f(x0)
hasil=[iterasi,x0,fx,dx];
for k=1:N,
  df0 = subs(df,x0);  % hitung nilai f'(x0)
  if df0==0,        % iterasi harus dihentikan jika f'(x0)=0
    if k>5, disp(num2str(hasil(k-5:k,:),17));
    else disp(num2str(hasil,18));end
   error(['Stop, bertemu garis singgung mendatar di x = ',num2str(x0),'!']);
    else  dx = m*fx/df0;
  end
  x = x0 - dx;        % hampiran berikutnya, x
  fx = subs(f,x);     % hitung f(x)
  err = abs(dx);      % beda dengan hampiran sebelumnya
  relerr = err/(abs(x)+eps);   % hampiran galat relatif
  hasil=[hasil;[k,x,fx,dx]];   % simpan hasilnya
  x0=x;
  iterasi=k;
  if ((err<delta|relerr<delta)& abs(fx)<delta)|fx==0,
    % iterasi konvergen -> tambahkan kolom r-x_n
    disp('Iterasi konvergen dengan hasil sebagai berikut:');
    r=hasil(iterasi+1,2);       % akar yang diperoleh
    hasil(:,5)=r-hasil(:,2);    % kolom galat hampiran
```

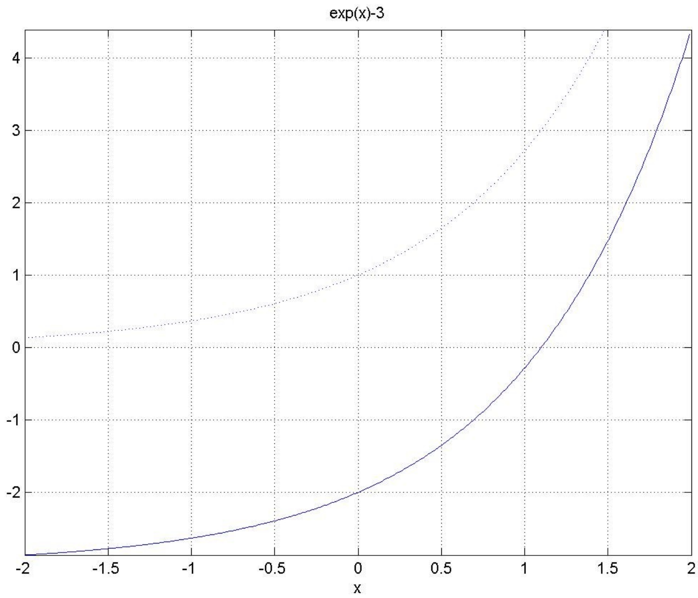
```
    if (nargin==6 & tabel==1),  % tampilkan hasil dengan pemisah kolom TAB
        hasil=sprintf('%d\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\n',hasil');
    else
    disp(num2str(hasil,18));     % atau tampilkan hasil dengan format tabel
    end
    break
    else if iterasi==N, disp('Iterasi mungkin tidak konvergen!'),
            disp('Berikut adalah hasil 6 iterasi terakhir:'),
            disp(num2str(hasil(iterasi-4:iterasi+1,:),18));
            error('Cobalah ulangi, dengan menambah maksimum iterasi! ')
        end
    end
end
```

D. Fungsi-fungsi Untuk Eksperimen

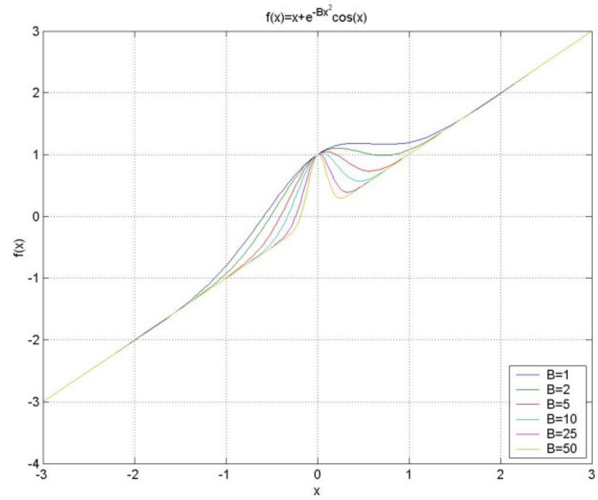
1. $f(x) = x^6 - x - 1$

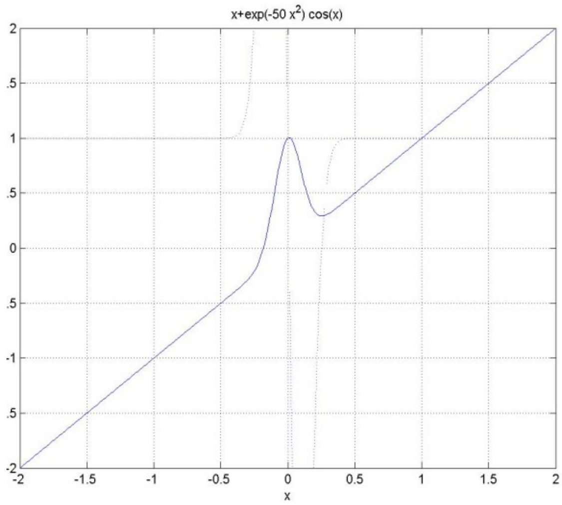


2. $f(x) = e^x - 3$

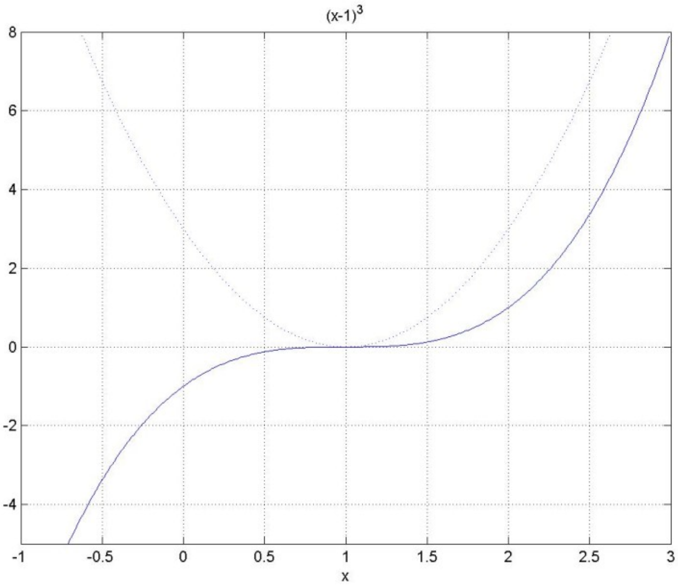


3. $f(x) = x + e^{-Bx^2}\cos(x), \quad B = 1, 2, 5, 10, 25, 50.$

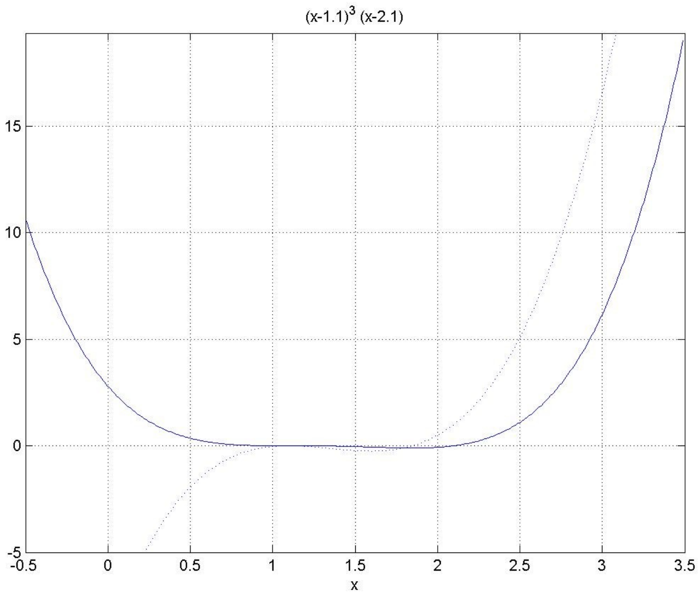




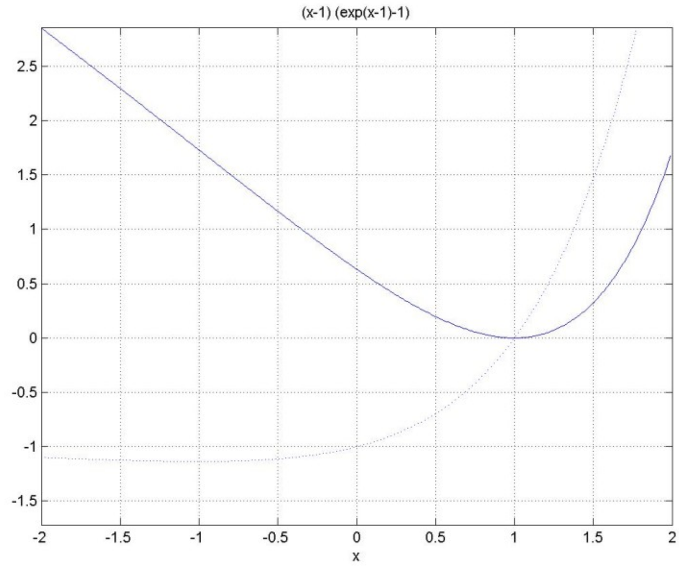
4. $f(x) = (x - 1)^3$



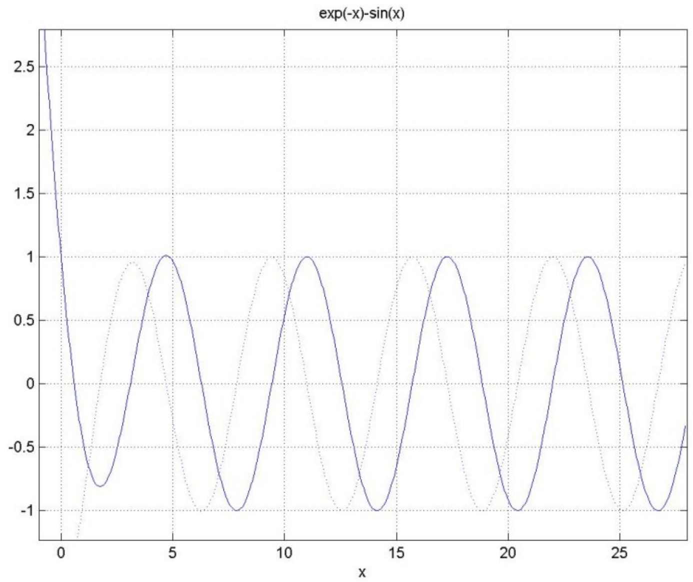
5. $f(x) = (x - 1.1)^3 (x - 2.1).$



6. $f(x) = (x-1)(e^{x-1}-1)$.



7. $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$



8. $f(x) = xe^{-x}$