6 Penurunan Fungsi Secara Numerik

Pada bab ini kita membicarakan metode numerik untuk menaksir nilai turunan suatu fungsi. Suatu fungsi f, baik diketahui rumusnya secara eksplisit maupun dalam bentuk data titik-titik yang dilalui kurvanya, dihampiri dengan sebuah fungsi lain yang lebih sederhana. Suatu polinomial p merupakan pilihan yang paling mudah sebagai hampiran fungsi f, karena setiap polinomial dapat dengan mudah diturunkan.

Turunan polinomial p, yakni $p'(x)$, digunakan sebagai hampiran untuk $f'(x)$ untuk sebarang nilai x. Secara geometris hal ini ekivalen dengan menghampiri gradien garis singgung pada kurva f di x dengan gradien garis singgung pada kurva p di x.

Rumus-rumus turunan numerik bermanfaat di dalam pengembangan algoritma untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada persamaan diferensial biasa dan parsial.

6.1 Turunan Tingkat Satu

6.1.1 Rumus Selisih Maju Dua-Titik

Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi riil satu variabel dan termasuk dalam kelas fungsi C^2. Perhatikan polinomial Taylor berderajad 1 untuk $f(x)$ di sekitar $x = x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 f''(c)/2 \tag{6.1}$$

dengan c adalah sebuah bilangan antara x dan x_0.

Misalkan $x = x_0 + h$, dengan $h > 0$. Maka (6.1) dapat ditulis ulang sebagai

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 f''(c)/2 \quad \text{untuksuatu} \quad c \in [x_0,\ x_0 + h].$$

Jadi,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - h\frac{f''(c)}{2}.$$

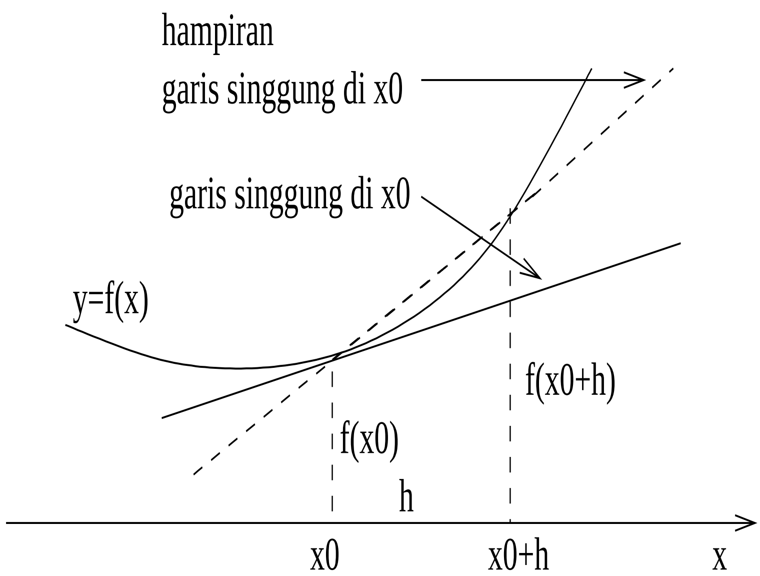
Jika h mengecil, $(f(x_0+h) - f(x_0))/h$ akan memberikan taksiran untuk nilai$f'(x_0)$. Ini berarti

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{6.2}$$

Galat di dalam hampiran ini dinyatakan sebagai

$$|galat| \leq \frac{Mh}{2} \tag{6.3}$$

dengan M adalah batas atas $f''(x)$ pada $[x_0, x_0+h]$. Batas galat (6.3) dapat diturunkan dari deret Taylor (6.1). Rumus (6.2) disebut **rumus selisih maju dua-titik**.



Gambar 6.1: Gradien busur sebagai hampiran gradien garis singgung: Rumus dua–titik–maju.

Perhatikan bahwa ruas kanan dalam rumus (6.2) merupakan gradien

6.1.3 Rumus Selisih Pusat Dua-Titik

Dari (6.2) kita mempunyai

$$hf'(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Dari (6.4) kita dapatkan

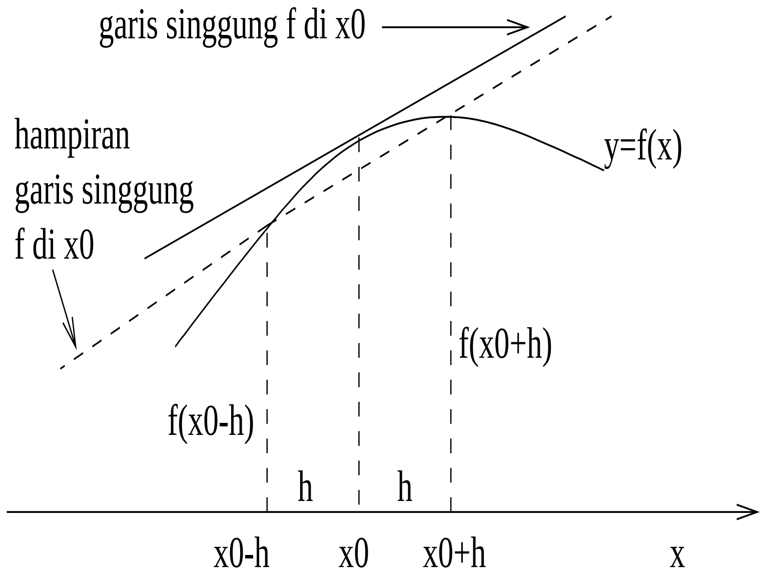
$$hf'(x_0) = -f(x_0 - h) + f(x_0).$$

Dengan menjumlahkan keduanya kita peroleh

$$2hf'(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0 - h).$$

Jadi,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \tag{6.6}$$



Gambar 6.3: Gradien busur sebagai hampiran gradien garis singgung: Rumus selisih pusat.

Rumus (6.6) disebut **rumus selisih pusat dua-titik**. Perhatikan

Pada tabel hasil perhitungan MATLAB di atas, kolom ketiga merupakan galat selisih pusat berorde $O(h^2)$ dan kolom terakhir merupakan galat selisih pusat berorde $O(h^4)$. Terlihat bahwa nilai-nilai pada kolom terakhir lebih kecil hampir h^2 kali kolom ketiga. Kedua hampiran (kolom kedua dan keempat) juga semakin menuju ke 0.5 semakin h mengecil, namun kolom keempat konvergen lebih cepat. □

Pembaca mungkin bertanya, berapakah nilai h yang optimal untuk menghitung hampiran nilai suatu turunan? Berikut diberikan dua rumus untuk menentukan nilai h yang mengoptimalkan galat hampiran turunan fungsi. Pembaca yang tertarik untuk mengetahui lebih detil dapat melihat pada referensi [1] halaman 321 –324.

- Untuk hampiran turunan pertama dengan rumus selisih terbagi pusat berorde $O(h^2)$:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + E(f,h),$$

dengan syarat $f \in C^3[a,b]$ dan $x-h, x, x+h \in [a,b]$, nilai h yang meminimumkan $E(f,h)$ adalah

$$h = \left(\frac{3\epsilon}{M}\right)^{1/3}, \tag{6.20}$$

dengan ϵ adalah batas galat pembulatan dan

$$M = \max_{a \le x \le b}\{|f^{(3)}(x)|\}.$$

- Untuk hampiran turunan pertama dengan rumus selisih terbagi pusat berorde $O(h^4)$:

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x+2h)}{12h} + E(f,h),$$

dengan syarat $f \in C^5[a,b]$ dan $x-2h, x-h, x, x+h, x+2h \in [a,b]$, nilai h yang meminimumkan $E(f,h)$ adalah

$$h = \left(\frac{45\epsilon}{4M}\right)^{1/5}, \tag{6.21}$$

peroleh

$$3f'(x_0) \approx 4R_0(h) - R_0(2h) = \frac{4(f_1 - f_{-1})}{2h} - \frac{f_2 - f_{-2}}{4h}$$

atau

$$f'(x_0) \approx \frac{4R_0(h) - R_0(2h)}{3} = \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} \qquad (6.26)$$

Perhatikan, ruas kanan pada (6.26) adalah rumus selisih pusat beroder $O(h^4)$, dan ternyata dapat diperoleh dari rumus selisih pusat (6.22) yang berorde $O(h^2)$. Dengan demikian galat rumus selisih pusat dapat diperkecil dengan menggunakan rumus (6.26). Suatu metode untuk mendapatkan rumus untuk $f'(x_0)$ yang berorde lebih tinggi dari rumus yang berorde lebih rendah disebut **ekstrapolasi**. Ruas tengah pada (6.26) merupakan **rumus ekstrapolasi Richardson** untuk menghasilkan rumus hampiran turunan $f'(x_0)$ berorde $O(h^4)$ dari rumus selisih pusat berorde $O(h^2)$.

Dengan cara serupa kita dapat menurunkan rumus selisih pusat berorde lebih tinggi dari rumus selisih pusat berorde $O(h^4)$. Dengan menggunakan notasi sebelumnya dan mendefinisikan

$$R_1(k \times h) = \frac{-f_{2k} + 8f_k - 8f_{-k} + f_{-2k}}{12 \times k \times h} = \frac{4R_0(k \times h) - R_0(2k \times h)}{3}, \; k = 1, 2, \qquad (6.27)$$

dapat diturunkan rumus ekstrapolasi berorde $O(h^6)$ untuk hampiran $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) \approx \frac{16R_1(h) - R_1(2h)}{15}. \qquad (6.28)$$

Secara umum pembahasan ekstrapolasi di atas dapat dinyatakan dalam teorema di bawah ini.

TEOREMA 6.3 (HAMPIRAN TURUNAN–EKSTRAPOLASI RICHARDSON). *Jika $R_{k-1}(h)$ dan $R_{k-1}(2h)$ adalah dua hampiran $f'(x_0)$ yang berorde $O(h^{2k})$ dan memenuhi*

$$f'(x_0) = R_{k-1}(h) + a_1 h^{2k} + a_2 h^{2(k+1)} + \ldots, \qquad (6.29)$$

$$f'(x_0) = R_{k-1}(2h) + a_1 (2h)^{2k} + a_2 (2h)^{2(k+1)} + \ldots, \qquad (6.30)$$

maka hampiran tersebut dapat ditingkatkan ordenya menjadi $O(h^{2(k+1)})$ dengan

$$R_3(0.025) = \frac{64R_2(0.25) - R_2(0.05)}{63} = 22.1671683$$

Kita tahu bahwa turunan fungsi $f(x) = xe^x$ adalah $f'(x) = xe^x + e^x$, sehingga $f'(2) = 2e^2 + e^2 = 3e^2 = 22.1671683$. Bandingkah hasil-hasil pendekatan di atas dengan nilai yang sesungguhnya! Anda dapat menilai pendekatan mana yang terbaik untuk kasus ini. □

Untuk keperluan perhitungan secara praktis, proses perhitungan hampiran turunan dengan menggunakan ekstrapolasi Richardson dapat dilakukan dengan menggunakan tabel seperti Tabel 6.1.4. Perhitungan pada tabel tersebut dimulai dari baris pertama yang dihitung menggunakan rumus selisih pusat. Selanjutnya, setiap sel di bawahnya dihitung dengan menggunakan sel di atasnya dan sel di kanan atasnya dengan pengali dan pembagi seperti tercantum pada setiap baris. Hampiran terakhir untuk $f'(x_0)$ adalah $R(n, 1)$.

Tabel 6.1: Tabel Ekstrapolasi Richardson untuk Hampiran Turunan

$R(i,j) = \frac{4^{i-i}R(i-1,j)-R(i-1,j+1)}{4^{i-1}-1}$			**Lebar langkah**				
i	$R(1,j) = \frac{f_j - f_{-j}}{2^j h}$, $j = 1, 2, 3, ..., n$		h	$2h$	$4h$	$\ldots$	$2^{n-1}h$
1	Pengali (4^{i-1})	Pengali (4^{i-1})	R(1,1)	R(1,2)	R(1,3)	$\ldots$	R(1,n)
2	4	3	R(2,1)	R(2,2)	R(2,3)	$\ldots$	xxx
3	16	15	R(3,1)	R(3,2)	R(3,3)	$\ldots$	xxx
4	64	63	R(4,1)	R(4,2)	R(4,3)	$\ldots$	xxx
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	xxx
n	4^{n-1}	$4^{n-1} - 1$	R(n,1)	xxx	xxx	xxx	xxx

CONTOH 6.5.
Perhitungan pada contoh sebelumnya dapat dilakukan dengan MATLAB sebagai berikut.

```
>> f=inline('x.*exp(x)')
f =
     Inline function:
     f(x) = x.*exp(x)
>> x0=2;
>> h=0.025
h =
   0.02500000000000
>> h=h*2.^[0:3]
h =
   0.0250000000000   0.0500000000000   0.1000000000000   0.2000000000000
```

```
function R=deriver(f,x0,h,n)
% menghitung turunan dengan ekstrapolasi Richardson
% f fungsi yang dihitung f'(x0)
% h = lebar interval awal, n = cacah iterasi
h=h*2.^[0:n-1];
R=(f(x0+h)-f(x0-h))./(2*h) % rumus selisih pusat
for j=1:n-1,  % ekstrapolasi Richardson
    R=(4^j*R(1:n-j)-R(2:n-j+1))./(4^j-1)
end
```

Gambar 6.4: Fungsi MATLAB `deriver.m` implementasi ekstrapolasi Richardson

Misalkan $P_n(x)$ adalah polinomial berderajad n yang menginterpolasikan $f(x)$ di $n+1$ titik dengan absis $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$, yakni $P_n(x_k) = f(x_k)$ untuk $k = 1, 2, ..., n+1$. Dalam hal ini $P_n(x)$ merupakan hampiran untuk $f(x)$ untuk $\min\{x_k\} \leq x \leq \max\{x_k\}$, sehingga kita dapat menghampiri $f'(x)$, untuk x pada interval tersebut, dengan

$$f'(x) \approx P_n'(x). \tag{6.32}$$

Sebagaimana telah dibahas pada bab Interpolasi, kita dapat menggunakan polinomial Lagrange atau polinomial Newton sebagai polinomial interpolasi. Dari polinomial-polinomial interpolasi dapat diturunkan rumus-rumus hampiran turunan. Misalkan kita mulai dengan titik $(x_1, f(x_1))$ dan $(x_2, f(x_2))$. Kita tahu bahwa polinomial yang menginterpolasikan kedua titik tersebut adalah

$$P_1(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Apabila polinomial tersebut kita turunkan, maka diperoleh

$$P_1'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{6.33}$$

Selanjutnya, apabila pada (6.33) kita ganti $x_1 = x_0 - h$ dan $x_2 = x_0 + h$,

$$P_2'(x_0) \quad = \quad \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} \approx f'(x_0). \quad (6.35)$$

Rumus hampiran turunan (6.35) disebut **rumus selisih maju tiga titik**. Dengan cara serupa, apabila kita ganti $x_1 = x_0, x_2 = x_0 - h$ dan $x_3 = x_0 + h$, maka diperoleh **rumus selisih pusat**, dan apabila kita ganti $x_1 = x_0, x_2 = x_0 - h$ dan $x_3 = x_0 - 2h$, maka diperoleh **rumus selisih mundur tiga titik**

$$P_2'(x_0) = \frac{3f(x_0) - 4f(x_0 - h) + f(x - 2h)}{2h} \approx f'(x_0). \quad (6.36)$$

Demikian seterusnya, kita dapat menggunakan polinomial-polinomial berderajad lebih tinggi (dengan cacah titik semakin bertambah) untuk mendapatkan rumus-rumus hampiran turunan fungsi di suatu titik. Polinomial Newton $P_N(x)$ berorde N yang menginterpolasikan $f(x)$ di $N+1$ titik dengan absis x_0,x_1, x_2, ..., x_N adalah

$$P_N(x) = a_0 + \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1} \prod_{k=0}^{j} (x - x_k). \quad (6.37)$$

Turunan $P_N(x)$ adalah

$$P_N'(x) = a_1 + \sum_{j=1}^{N-1} a_{j+1} \sum_{i=0}^{j} \prod_{k=0,k\neq i}^{j} (x - x_k). \quad (6.38)$$

Selanjutnya, nilai $P_N'(x)$ di $x = x_0$ adalah

$$P_N'(x_0) = a_1 + \sum_{j=1}^{N-1} a_{j+1} \prod_{k\neq 0}^{j} (x_0 - x_k). \quad (6.39)$$

Apabila $x_k = x_0 + kh$ untuk suatu $h > 0$ dan $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...,$ maka

$$f'(x_0) = P_N'(x_0) + O(h^{N-1}).$$

Metode ini dapat digabungkan dengan metode selisih terbagi Newton untuk menghitung koefisien-koefisien polinomial interpolasi Newton.

Catatan:

Rumus (6.39) harus digunakan untuk menghitung $f'(x_0) \approx P_N(x_0)$. Untuk menghitung, misalnya $f'(x_k) \approx P_N(x_k)$, absis-absis harus disusun ulang menjadi $\{x_k, x_0, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_N\}$ kemudian dibentuk polino-

```
ans =
-2.21999067245464   0.00325360302929
-2.22321172408835   0.00003255139559
-2.22324394993922   0.00000032554471
```

*Dari hasil perhitungan di atas, khususnya dengan mengamati kolom kedua matriks **ans**, terlihat bahwa galatnya semakin berkurang dengan faktor sekitar 1/100 semakin nilai h mengecil 1/10 kali.*

2. *Dari persamaan (6.43) kita gunakan rumus hampiran turunan kedua:*

$$f"(x) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}.$$

Perhitungan dengan MATLAB menggunakan rumus tersebut adalah sebagai berikut (kita hanya perlu menghitung nilai `d2f` *yang baru):*

```
>> d2f=(-f(x0+2*h)+16*f(x0+h)-30*f(x0) ...
   +16*f(x0-h)-f(x0-2*h))./(12*h.^2);
>> [d2f d2f-df2(x0)]
ans =
-2.22323807255170   0.00000620293224
-2.22324427486357   0.00000000062036
-2.22324427541961   0.00000000006432
```

*(***Tanda tiga titik di akhir baris MATLAB artinya disambung ke baris di bawahnya. Pada MATLAB langsung sambung dengan baris di bawahnya jika masih cukup.***)*

Terlihat bahwa galat hampiran-hampiran di atas jauh lebih kecil daripada galat-galat pada perhitungan sebelumnya, dan juga penurunan galat tersebut sebesar kira-kira 1/10000 kali dengan penurunan nilai h sebesar 1/10. Nilai turunan yang sebenarnya adalah $f"(1) = -2.22324427548393$. □

Galat dalam perhitungan hampiran nilai turunan suatu fungsi meliputi galat dalam perhitungan nilai fungsi (pembulatan) dan galat pemotongan deret Taylor. Apabila galat dalam perhitungan fungsi diketahui batas atasnya (misalnya dengan menentukan tingkat keakuratan) dan turunan-turunan yang lebih tinggi terbatas, maka kita dapat menentukan lebar langkah (h) yang optimal (yakni yang meminimumkan galat). Hal ini mengingat galat pemotongan berkaitan erat dengan orde rumus yang bersangkutan terhadap lebar langkah yang dipakai (h).

$k = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$$
\begin{aligned}
f"(x_0) &\approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}, &(6.54)\\
&\approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}. &(6.55)\\
f^{(3)}(x_0) &\approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}, &(6.56)\\
&\approx \frac{-5f_0 + 18f_{-1} - 24f_{-2} + 14f_{-3} - 3f_{-4}}{2h^3}. &(6.57)\\
f^{(4)}(x_0) &\approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}, &(6.58)\\
&\approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}. &(6.59)
\end{aligned}
$$

Berikut ditunjukkan bagaimana menurunkan rumus selisih maju (6.54) dengan menggunakan polinomial interpolasi Newton.

Kita mulai dengan polinomial interpolasi Newton kubik yang menginterpolasikan $f(x)$ di empat titik dengan absis x_0, x_1, x_2, dan x_3. Polinomial ini adalah

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2),$$

dengan koefisien-koesfisiennya merupakan selisih-selisih terbagi Newton, yakni

$$
\begin{aligned}
a_0 &= f_0, \qquad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{h}, \qquad a_2 = \frac{\frac{f_2-f_1}{h} - \frac{f_1-f_0}{h}}{2h} = \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{2h^2},\\
a_3 &= \frac{-f_0 + 3f_1 - 3f_2 + f_3}{6h^3}.
\end{aligned}
$$

Turunan kedua $P_3(x)$ adalah

$$P_3"(x) = 2a_2 + 2a_3[(x - x_0) + (x - x_1) + (x - x_2)].$$

Di x_0 nilai turunan tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
P_3"(x_0) &= \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} + \frac{-f_0 + 3f_1 - 3f_2 + f_3}{3h^3}(-h - 2h)\\
&= \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \approx f"(x_0).
\end{aligned}
$$

LATIHAN 6.2

1. Tulis program MATLAB untuk menghitung hampiran nilai $f''(x)$ dengan menggunakan rumus (6.41) dengan lebar interval $2^{-k}h$ untuk $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, nilai h ditentukan.

2. Misalkan $f(x) = \ln x$. Hitunglah hampiran nilai $f''(5)$ dengan menggunakan rumus (6.40) dengan $h = 0.01$. Ulangi perhitungan dengan menggunakan rumus (6.41). Bandingkan galat kedua hampiran tersebut.

3. Gunakah rumus (6.40) dengan $h = 0.01$ untuk menghitung hampiran $f''(1)$ untuk fungsi-fungsi di bawah ini.
   (a) $f(x) = x^2 e^{\cos x}$ (b) $f(x) = \ln x^2$ (c) $f(x) = x^5 + \sin x$

4. Gunakah rumus (6.41) dengan $h = 0.01$ untuk menghitung hampiran $f''(1)$ untuk fungsi-fungsi di bawah ini.
   (a) $f(x) = x^2 e^{\cos x}$ (b) $f(x) = \ln x^2$ (c) $f(x) = x^5 + \sin x$

5. Hitung hampiran nilai $f''(1)$ untuk fungsi $f(x) = \sin 4x$ dengan menggunakan rumus

$$f''(x_1) \approx \frac{1}{h^2}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

   dengan $h =$ 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, dan 0.01. Gunakan tingkat keakuratan perhitungan sampai enam angka di belakang koma.

6. Gunakan ekspansi Taylor untuk $f(x+h)$, $f(x-h)$, $f(x+2h)$, dan $f(x-2h)$ untuk menurunkan rumus selisih pusat

$$f'''(x) \approx \frac{(f(x+2h) - f(x-2h)) - 2(f(x+h) - f(x-h))}{2h^3}.$$

7. Gunakan rumus yang diperoleh pada soal no. 6 untuk menghitung hampiran nilai-nilai $f'''(1)$ untuk fungsi-fungsi di bawah ini dengan menggunakan panjang interval diberikan. Bandingkan hasil perhitungan tersebut dengan nilai eksaknya.

   (a) $f(x) = \sin(x),\ h = 0.1$
   (b) $f(x) = \sin(x)\ln x,\ h = 0.01$
   (c) $f(x) = x^3 - \ln x,\ h = 0.01$
   (d) $f(x) = e^x,\ h = 0.01$
   (e) $f(x) = e^x \cos(x),\ h = 0.01$
   (f) $f(x) = x^2 e^x,\ h = 0.01$

hampiran turunan parsial, misalnya

$$f_x(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h} + O(h^2)$$
$$f_y(x,y) = \frac{f(x,y+h) - f(x,y-h)}{2h} + O(h^2)$$

(a) Misalkan $f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$. Hitunglah hampiran nilai-nilai $f_x(2,3)$ dan $f_y(2,3)$ dengan menggunakan rumus-rumus di atas dengan h = 0.1, 0.01, dan 0.001. Bandingkan hasilnya dengan nilai eksaknya.

(b) Misalkan $f(x,y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$. Hitunglah hampiran nilai-nilai $f_x(3,4)$ dan $f_y(3,4)$ dengan menggunakan rumus-rumus di atas dengan h = 0.1, 0.01, dan 0.001. Bandingkan hasilnya dengan nilai eksaknya.

12. Hampiran turunan parsial yang lebih tinggi dapat diperoleh dengan mengadaptasi rumus hampiran turunan yang lebih tinggi untuk fungsi satu variabel, misalnya

$$f_{xx}(x,y) = \frac{f(x+2h,y) - 2f(x,y) + f(x-2h,y)}{4h^2}$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{f(x,y+2h) - 2f(x,y) + f(x,y-2h)}{4h^2}$$

Gunakan rumus-rumus di atas untuk menghitung hampiran $f_{xx}(2,3)$ dan $f_{yy}(2,3)$ untuk fungsi-fungsi di bawah ini, dengan menggunakan nilai-nilai h yang diberikan. Bandingkan hasilnya dengan nilai eksaknya.

(a) $f(x) = \frac{xy}{x+y}$, $h = 0.1, 0.01$
(b) $f(x) = \sin(xy)$, $h = 0.01, 0.001$
(c) $f(x) = \frac{\sin(xy)}{x+y}$, $h = 0.01, 0.001$
(d) $f(x) = e^{(x-y)}$, $h = 0.1, 0.05$
(e) $f(x) = \cos(y-x)$, $h = 0.05, 0.01$
(f) $f(x) = \ln(xy)$, $h = 0.1, 0.01$

6.3 Rangkuman

Berikut adalah rumus-rumus untuk menghitung hampiran turunan suatu fungsi beserta orde kesalahannya dan nilai optimal lebar langkah yang

$R(i,j) = \frac{4^{i-i}R(i-1,j)-R(i-1,j+1)}{4^{i-1}-1}$			Lebar langkah				
i	$R(1,j) = \frac{f_j - f_{-j}}{2^j h}$, $j = 1, 2, 3, ..., n$		h	$2h$	$4h$	...	$2^{n-1}h$
1	Pengali (4^{i-1})	Pembagi ($4^{i-1} - 1$)	R(1,1)	R(1,2)	R(1,3)	...	R(1,n)
2	4	3	R(2,1)	R(2,2)	R(2,3)	...	xxx
3	16	15	R(3,1)	R(3,2)	R(3,3)	...	xxx
4	64	63	R(4,1)	R(4,2)	R(4,3)	...	xxx
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	xxx
n	4^{n-1}	$4^{n-1} - 1$	R(n,1)	xxx	xxx	xxx	xxx

Hampiran turunan dengan polinomial interpolasi Jika $P_n(x)$ adalah polinomial berderajad n yang menginterpolasikan $f(x)$ di $n+1$ titik dengan absis x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, yakni $P_n(x_k) = f(x_k)$ untuk $k = 1, 2, ..., n+1$, maka $P_n(x)$ merupakan hampiran $f(x)$ untuk $\min\{x_k\} \leq x \leq \max\{x_k\}$, sehingga kita dapat menghampiri $f'(x)$, untuk x pada interval tersebut, dengan

$$f'(x) \approx P'_n(x).$$

Rumus selisih maju tiga titik untuk $f'(x_0)$

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}.$$

Rumus selisih mundur tiga titik untuk $f'(x_0)$

$$f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_1 + f_2}{2h}.$$

Rumus-rumus selisih pusat untuk turunan tingkat tinggi

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \\
f''(x_0) &= \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} + O(h^4) \\
f^{(3)}(x_0) &= \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{12h^3} + O(h^2) \\
f^{(3)}(x_0) &= \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_1 - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3} + O(h^4)
\end{aligned}$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4} + O(h^2)$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4} + O(h^4)$$

Rumus-rumus selisih maju/mundur untuk turunan tingkat tinggi

$$\begin{aligned}
f''(x_0) &\approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2}, \\
&\approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}. \\
f^{(3)}(x_0) &\approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3}, \\
&\approx \frac{-5f_0 + 18f_{-1} - 24f_{-2} + 14f_{-3} - 3f_{-4}}{2h^3}. \\
f^{(4)}(x_0) &\approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}, \\
&\approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}.
\end{aligned}$$