5 INTEGRASI NUMERIK

Integral tentu

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx \tag{5.1}$$

di dalam Kalkulus didefinisikan sebagai sebuah limit **jumlah Riemann**. Selanjutnya, menurut Teorema Dasar Kalkulus integral tersebut dapat dihitung dengan rumus

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \tag{5.2}$$

dengan $F(x)$ adalah antiderivatif $f(x)$ (yakni $F'(x) = f(x)$). Banyak integral tentu yang dapat dihitung dengan rumus tersebut, seperti yang banyak dijumpai di buku-buku kalkulus. Meskipun demikian, tidak sedikit integral tentu yang tidak dapat dihitung dengan rumus (5.2) karena integran $f(x)$ tidak mempunyai antiderivatif yang dapat dinyatakan dalam fungsi-fungsi elementer. Dalam hal ini dapat dilakukan perhitungan integral tentu secara numerik.

Integrasi numerik merupakan suatu alat utama yang digunakan para insinyur dan ilmuwan untuk mendapatkan nilai-nilai hampiran untuk beberapa integral tentu yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Di bidang termodinamika statistik misalnya, model Debye untuk menghitung kapasitas panas sebuah benda pejal memuat fungsi sebagai berikut [6]:

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1}\, dt.$$

Oleh karena $\Phi(x)$ tidak dapat dinyatakan secara eksplisit, secara analitik, integrasi numerik harus digunakan untuk mendapatkan hampiran nilai-

nilai $\Phi(x)$.

Contoh lain integral tentu yang tidak dapat diperoleh secara analitik adalah dalam perhitungan distribusi normal

$$N(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt.$$

Masih banyak contoh-contoh integral tentu, seperti

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \qquad \text{dan} \qquad \int_0^\pi x^\pi \sin(\sqrt{x})\, dx,$$

yang tidak dapat dihitung secara analitik dan memerlukan perhitungan secara numerik sebagai hampirannya.

Pada bab ini kita membahas beberapa metode yang dapat digunakan untuk menghitung hampiran suatu integral tentu. Rumus-rumus integrasi numerik untuk integral $f(x)$ pada interval $[a,\ b]$ didasarkan pada menghitungan nilai-nilai $f(x)$ di berhingga titik sampel pada $[a,\ b]$. Berikut diberikan definisi dasar dalam integrasi numerik.

5.1 Pengertian Kuadratur

DEFINISI 5.1 (KUADRATUR).
Misalkan $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ merupakan partisi $[a,\ b]$. Suatu rumus berbentuk

$$Q[f] = \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_N f(x_N) \tag{5.3}$$

sedemikian hingga

$$\int_a^b f(x)\, dx = Q[f] + E[f] \tag{5.4}$$

disebut suatu rumus integral numerik atau **kuadratur**. *Suku $E[f]$ disebut* **galat pemotongan integral**. *Nilai-nilai $\{x_i\}_{i=0}^N$ disebut* **simpul-simpul kuadratur** *dan nilai-nilai $\{w_i\}_{i=0}^N$ disebut* **bobot**.

Tergantung pada pemakaian, simpul-simpul $\{x_i\}$ dipilih secara berbeda-beda. Untuk aturan trapesium dan aturan Simpson, misal-

menginterpolasikan $f(x)$ pada $[x_0,\ x_N]$. Misalkan pula $h > 0$ dan $x_k = x_0 + kh$, serta $f_k = f(x_k)$. Dari keempat polinomial interpolasi tersebut dapat diturunkan rumus-rumus kuadratur Newton – Cotes sebagai berikut

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx T_2(f) = \frac{h}{2}(f_0 + f_1), \qquad \text{(aturan trapesium)} \tag{5.5}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx S_3(f) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2), \qquad \text{(aturan Simpson)} \tag{5.6}$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx S_4(f) = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \qquad \text{(aturan Simpson } \tfrac{3}{8}) \tag{5.7}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx B_5(f) = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4). \qquad \text{(aturan Boole)} \tag{5.8}$$

Penurunan rumus-rumus kuadratur di atas dapat dilakukan dengan menggunakan polinomial-polinomial interpolasi baik polinomial Lagrange maupun Newton. Apabila digunakan polinomial bentuk baku, maka digunakan metode koefisien tak tentu.

Sebagai contoh, untuk menurunkan rumus trapesium dapat digunakan polinomial linier yang melalui (x_0, f_0) dan (x_1, f_1), yakni

$$P_1(x) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f_0 = \frac{f_1 - f_0}{h}(x - x_0) + f_0.$$

Apabila polinomial tersebut diintegralkan pada $[x_0,\ x_1]$, maka dengan mengingat $x_1 - x_0 = h$ diperoleh

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,dx = \frac{f_1 - f_0}{2h}h^2 + f_0 h = \frac{h}{2}(f_0 + f_1).$$

Penurunan rumus (5.6) ditunda hingga kita sampai pada bagian pembahasan aturan Simpson. Meskipun demikian, pembaca yang penasaran dapat mencoba sendiri dengan mengikuti alur pemikiran di atas.

Satu hal penting yang perlu dicatat adalah bahwa rumus-rumus kuadratur (5.5) – (5.8) menghitung integral-integral tentu (atau luas daerah di bawah kurva) yang berbeda-beda, karena interval integrasinya berbeda-beda. Pada aturan trapesium interval integrasinya adalah $[x_0,\ x_1]$, aturan Simpson pada $[x_0,\ x_2]$, aturan Simpson $\frac{3}{8}$ pada $[x_0,\ x_3]$, dan aturan Boole pada $[x_0,\ x_4]$. Gambar 5.1 menyajikan fungsi-fungsi MATLAB implementasi rumus-rumus kuadratur tersebut. (Masing-

```
f =
     Inline function:
     f(x) = 1+exp(-x).*sin(4*x)

>> T2=trape2(f,0,.5)
T2 =
   0.63787919204190
>> S3=simpson3(f,0,.5)
S3 =
   1.32127583226988
>> S4=simpson38(f,0,.5)
S38 =
   1.64193150796661
>> B5=boole(f,0,.5)
B5 =
   2.29443965304223
```

Dalam pembahasan rumus-rumus kuadratur dan contoh di atas kita menggunakan empat interval integrasi yang berlainan dengan lebar sub-subinterval sama. Apabila kita harus menghitung kuadratur-kuadratur pada interval yang sama, misalnya $[a,\ b]$*, maka lebar setiap subinterval harus disesuaikan dengan cacah titik yang diperlukan, yakni* $h = (b-a)$ *untuk aturan trapesium,* $h = (b-a)/2$ *untuk aturan Simpson,* $h = (b-a)/3$ *untuk aturan Simpson* $\frac{3}{8}$*, dan* $h = (b-a)/4$ *untuk aturan Boole.* □

CONTOH 5.2.
Misalkan kita ingin menghitung hampiran integral $\int_0^1 1 + (1+x)e^x\ dx$*. Gunakan keempat rumus kuadratur di atas dan bandingkan hasilnya dengan nilai sebenarnya dengan mengingat* $\int 1 + (1+x)e^x\ dx = x(1+e^x)$*.*

Penyelesaian:
Kita akan menggunakan fungsi-fungsi MATLAB yang sudah kita miliki. Akan tetapi, di sini setiap kali hendak menggunakan suatu fungsi kita harus menghitung nilai h *terlebih dahulu. Perhatikan cara dan hasil perhitungan MATLAB berikut ini.*

```
>> f=inline('1+(1+x).*exp(x)')
f =
     Inline function:
     f(x) = 1+(1+x).*exp(x)
>> F=inline('x+x.*exp(x)') % antiderivatif f(x)
```

(a) $f(x) = \sin(\pi x)$

(b) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

(c) $f(x) = \sin(x) + e^{-x}$

(d) $f(x) = x \cos x\ dx$

2. Hitunglah setiap integral tentu $\int_a^b f(x)\ dx$ di bawah ini dengan menggunakan rumus-rumus kuadratur (5.5) – (5.8) dengan lebar langkah $h = b-a$, $h = (b-a)/2$, $h = (b-a)/3$, dan $h = (b-a)/4$, untuk berturut-turut aturan trapesium, aturan Simpson, aturan Simpson $\frac{3}{8}$, dan aturan Boole. Gunakan fungsi-fungsi MATLAB pada Gambar 5.1.

   (a) $\int_0^\pi x^\pi \sin(\sqrt{x})\ dx$

   (b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

   (c) $\int_0^4 \frac{dx}{1+x^2}$

   (d) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

   (e) $\int_0^1 \frac{x^3}{e^x-1}\ dx$

   (f) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos(x)}$.

3. Tunjukkan bahwa aturan Simpson menghasilkan nilai integral eksak pada interval $[a,\ b]$ untuk $f(x) = x^2$ dan $f(x) = x^3$, yakni

   (a) $\int_a^b x^2\ dx = \frac{b^3-a^3}{3}$

   (b) $\int_a^b x^3\ dx = \frac{b^4-a^4}{4}$.

4. Tentukan derajad keakuratan aturan Simpson dan aturan Simpson $\frac{3}{8}$ dengan menerapkan keduanya pada interval $[0,\ 2]$ untuk lima fungsi $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, dan $f(x) = x^4$. Gunakan fungsi-fungsi MATLAB pada Gambar 5.1 untuk perhitungannya.

5. Tentukan derajad keakuratan aturan Boole dengan menerapkannya pada interval $[0,\ 4]$ untuk tujuh fungsi $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = x^5$, dan $f(x) = x^6$. Gunakan fungsi-fungsi MATLAB pada Gambar 5.1 untuk perhitungannya.

6. Turunkan aturan Simpson $\frac{3}{8}$ dengan menggunakan polinomial interpolasi kubik yang melalui empat titik. *Petunjuk:* Misalkan polinomial interpolasinya sebagai

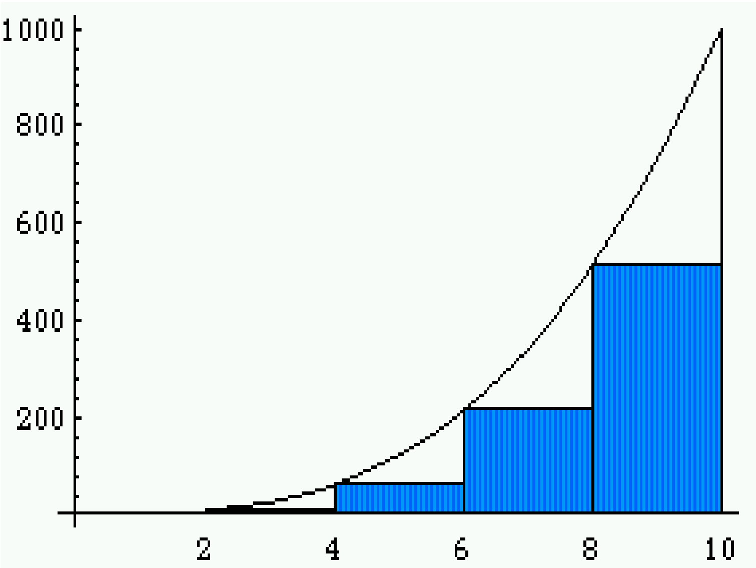
$$P_3(x) = f_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_))^2 + a_3(x-x_0)^3,$$

   dengan $x_k = x_0 + kh$, $f_k = (x_k)$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Mengingat, tunjukkan

Misalkan kita ingin menghitung integral

$$\int_0^{10} x^3\, dx.$$

Integral tentu yang ingin kita hitung adalah luas di bawah kurva $y = x^3$, di atas sumbu x, dan antara garis-garis $x = 0$ dan $x = 10$.
Kita dapat menghampiri luas tersebut dengan langkah-langkah sebagai berikut.



Gambar 5.3: Persegi-persegi panjang selebar 2 dan setinggi $(2(k-1))^3$ untuk $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5$.

1. Bagi interval $[0,\ 10]$ menjadi sub-subinterval $[0,\ 2]$, $[2,\ 4]$, $[4,\ 6]$, $[6,\ 8]$ dan $[8,\ 10]$.

2. Buat persegi panjang pada setiap subinterval dengan lebar panjang subinterval tersebut dan tinggi nilai fungsi di ujung kiri subinterval tersebut.

3. Jumlahkan luas persegi-persegi panjang yang terbentuk. Hasilnya

dengan menggunakan hampiran jumlah kiri, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Partisi interval $[a,\ b]$ menjadi n subinterval berbentuk $[x_i,\ x_{i+1}]$ sedemikian hingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

2. Buat persegi panjang pada $[x_i,\ x_{i+1}]$ dengan tinggi $f(x_i)$ dan lebar lebar subinterval ini. Misalkan $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Maka luas persegi panjang yang terbentuk adalah $f(x_i)\Delta x_i$.

3. Jumlah luas persegi-persegi panjang tersebut merupakan hampiran integral yang diinginkan.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i. \tag{5.10}$$

Jika sub-subinterval tersebut mempunyai lebar sama, katakan h, maka perhitungan di atas menjadi lebih mudah dan (5.10) dapat ditulis ulang sebagai

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h\sum_{i=0}^{n-1} f_i, \tag{5.11}$$

dengan $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + ih$.

5.2.2 Hampiran Jumlah Kanan

Kita dapat mencari hampiran lain terhadap daerah di bawah kurva $y = x^3$ di atas sumbu x di antara garis $x = 0$ dan $x = 10$ dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Bagi interval $[0,\ 10]$ menjadi sub-subinterval $[0,\ 2]$, $[2,\ 4]$, $[4,\ 6]$, $[6,\ 8]$ dan $[8,\ 10]$.

2. Buat persegi panjang pada setiap subinterval dengan lebar panjang subinterval tersebut dan tinggi nilai fungsi di ujung kanan subinterval tersebut.

# subinterval	hampiran integral	galat mutlak
5	3600.00	1100.00
6	3402.78	902.78
7	3265.31	765.31
8	3164.06	664.06
9	3086.42	586.42
10	3025.00	525.00
11	2975.21	475.21
12	2934.03	434.03
13	2899.41	399.41
14	2869.90	309.90

Secara umum, untuk menghitung

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

dengan menggunakan hampiran jumlah kanan, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Partisi interval $[a,\ b]$ menjadi n subinterval berbentuk $[x_i,\ x_{i+1}]$ sedemikian hingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

2. Buat persegi panjang pada $[x_i,\ x_{i+1}]$ dengan tinggi $f(x_{i+1})$ dan lebar lebar subinterval ini. Misalkan $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Maka luas persegi panjang yang terbentuk adalah $f(x_{i+1})\Delta x_i$.

3. Jumlah luas persegi-persegi panjang tersebut merupakan hampiran integral yang diinginkan.

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx R_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\Delta x_i. \tag{5.12}$$

Jika sub-subinterval tersebut mempunyai lebar sama, katakan h, maka perhitungan di atas menjadi lebih mudah dan (5.12) dapat ditulis ulang sebagai

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx R_n(f) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = h\sum_{i=1}^{n} f_i, \tag{5.13}$$

3. Jumlahkan luas persegi-persegi panjang yang terbentuk. Hasilnya merupakan hampiran luas daerah di bawah kurva pada interval $[0,\ 10]$.

Dengan langkah-langkah di atas kita peroleh Gambar 5.5. Pada gambar tersebut terdapat lima persegi panjang.
Luas persegi panjang pertama = lebar $\times$ tinggi =2 $\times 1^3$ = 2,
Luas persegi panjang kedua = lebar $\times$ tinggi =2 $\times 3^3$ = 54
Luas persegi panjang ketiga = lebar $\times$ tinggi =2 $\times 5^3$ = 250,
Luas persegi panjang keempat = lebar $\times$ tinggi =2 $\times 7^3$ =686,
Luas persegi panjang kelima = lebar $\times$ tinggi =2 $\times 9^3$= 1458.
Jumlah luas = 2 + 54 + 250 + 686 + 1458 = 2450.

Hasil hampiran ini jauh lebih baik daripada hampiran jumlah kiri maupun jumlah kanan dengan lima subinterval. Jika banyaknya subinterval semakin bertambah, hampiran yang diberikan semakin baik. Hal ini dapat divisualisasikan dengan animasi.

Tabel berikut ini menyajikan banyaknya subinterval dan nilai-nilai hampiran integral yang bersesuaian beserta galat mutlaknya.

# subinterval	hampiran integral	galat mutlak
5	2450.00	50.00
6	2465.28	34.72
7	2474.49	25.51
8	2480.47	19.53
9	2484.57	15.43
10	2487.50	12.50
12	2491.32	8.68
14	2493.62	6.38

Secara umum, untuk menghitung

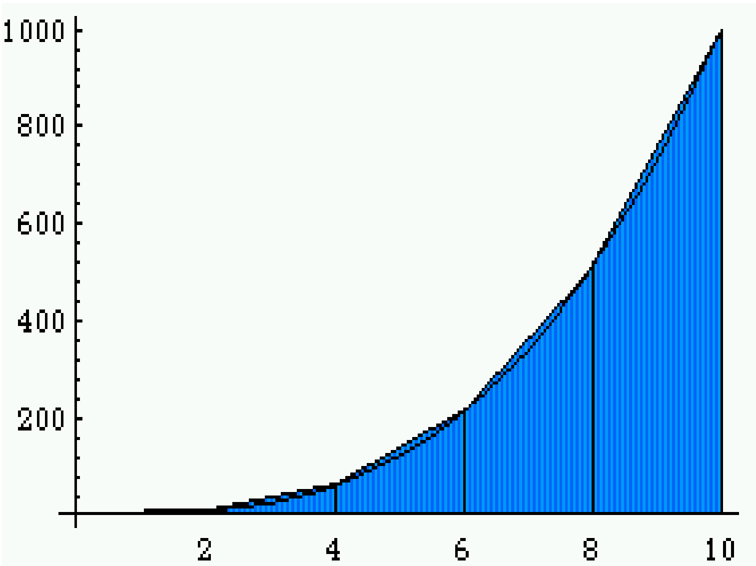
$$\int_a^b f(x)\ dx$$

dengan menggunakan hampiran titik tengah, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Partisi interval $[a,\ b]$ menjadi n subinterval berbentuk $[x_i,\ x_{i+1}]$ sedemikian hingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Luas trapesium keempat = $lebar \times (sisi_1 + sisi_2)/2$ =2 $\times (6^3 + 8^3)/2$ =728,
Luas trapesium kelima = $lebar \times (sisi_1 + sisi_2)/2$ =2 $\times (8^3 + 10^3)/2$= 1512.
Luas luas trapesium = 8 + 72 + 280 + 728 + 1512 = 2600.



Gambar 5.6: Jumlah luas trapesium sebagai hampiran luas daerah di bawah kurva.

Lagi-lagi, hampiran trapesium memberikan hasil yang jauh lebih besar daripada nilai sesungguhnya. Jika banyaknya subinterval semakin bertambah, hampiran yang diberikan semakin baik. Hal ini dapat divisualisasikan dengan animasi.

Tabel berikut ini menyajikan banyaknya subinterval dan nilai-nilai hampiran integral yang bersesuaian beserta galat mutlaknya.

Aturan Trapesium Majemuk:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n(f) = h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{h}{2}(f_0+f_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} f_i, \tag{5.17}$$

dengan $h = (b-a)/n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{i+1} = x_i + h$, $f_i = f(x_i)$, $0 \le i \le n-1$.

CONTOH 5.3.

Dengan menggunakan aturan trapesium majemuk, hitung integral $\sin x/x$ *pada* $(0,\ 0.8]$.

Penyelesaian:

x	$f(x)$
0.0	1.0 (dgn.limit)
0.1	0.9983341664683
0.2	0.9933466539753
0.3	0.9850673555378
0.4	0.9735458557716
0.5	0.9588510772084
0.6	0.9410707889917
0.7	0.9203109817681
0.8	0.8966951136244

Menggunakan satu subinterval:

$$T1 = \frac{0.8}{2}(1 + 0.8966951136244) = 0.7586780454498$$

Menggunakan dua subinterval:

$$T2 = \frac{0.4}{2}(1 + 2 * 0.9735458557716 + 0.8966951136244) = 0.7687573650335$$

Menggunakan empat subinterval:

$$\begin{aligned} T4 &= \frac{0.2}{2}(1 + 0.8966951136244) \\ &\quad +0.2 * (0.9933466539753 + 0.9735458557716 + 0.9410707889917) \\ &= 0.7712621711102 \end{aligned}$$

Tampilkan hasil perhitungan di MATLAB dengan format **long**.

(a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ (b) $\int_0^1 2 + \sin(2\sqrt{x})\, dx$ (c) $\int_{0.25}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

(d) $\int_0^4 x^2 e^{-x}\, dx$ (e) $\int_0^2 2\cos x\, dx$ (f) $\int_0^{\pi} \sin(2x)e^{-x}\, dx$

3. Dengan menggunakan aturan trapesium majemuk, hitunglah hampiran panjang kurva $y = f(x)$ pada interval $[a,\ b]$ yang dinyatakan dalam integral tentu

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

untuk fungsi-fungsi dan interval berikut ini. Bagilah setiap interval yang diberikan menjadi $N = 10$ subinterval sama panjang. Lakukan perhitungan menggunakan program MATLAB yang Anda buat.

(a) $f(x) = x^3,\ [0,\ 1]$ (b) $f(x) = \sin x,\ [0,\ \pi/4]$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ [0.25,\ 4]$ (d) $f(x) = e^{-x},\ [0,\ 1]$

(e) $f(x) = \cos x^2,\ [0,\ 2]$ (f) $f(x) = \sin(2x)e^{-x},\ [0,\ \pi]$

4. Dengan menggunakan aturan trapesium majemuk, hitunglah hampiran luas permukaan yang diperoleh dengan memutar kurva $y = f(x)$ pada interval $[a,\ b]$ terhadap sumbu–x. Luas ini dinyatakan dalam integral tentu

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Bagilah setiap interval yang diberikan menjadi $N = 10$ subinterval sama panjang. Lakukan perhitungan dengan menggunakan program MATLAB yang Anda buat.

(a) $f(x) = x^3,\ [0,\ 1]$ (b) $f(x) = \sin x,\ [0,\ \pi/4]$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ [0.25,\ 4]$ (d) $f(x) = e^{-x},\ [0,\ 1]$

(e) $f(x) = \cos x^2,\ [0,\ 2]$ (f) $f(x) = \sin(2x)e^{-x},\ [0,\ \pi]$

8. Hitunglah integral fungsi polinomial Lagrange

$$\int_a^b \left\{ f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} \right\} dx$$

untuk mendapatkan aturan trapesium dengan sebuah subinterval dan lebar interval $h = b - a$.

9. Turunkan aturan trapesium (dengan $N = 1$, $h = 1$) dengan menggunakan metode koefisien tak tentu:

   (a) Tentukan konstanta-konstanta w_0 dan w_1 sedemikian hingga $\int_0^1 g(t)\ dt = w_0 g(0) + w_1 g(1)$ adalah eksak untuk dua fungsi $g(t) = 1$ dan $g(t) = t$.

   (b) Gunakan relasi $f(x_0 + ht) = g(t)$ dan perubahan variabel $x = x_0 + ht$ dan $dx = h\ dt$ untuk mengubah aturan trapesium pada $[0,\ 1]$ menjadi aturan trapesium pada $[x_0,\ x_1]$.

10. Tentukan banyaknya subinterval N agar hampiran integral di bawah ini dengan menggunakan aturan trapesium dengan N subinterval menghasilkan tingkat keakuratan 5×10^{-9}.

    (a) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x\ dx$ (b) $\int_2^3 \frac{1}{5-x}\ dx$ (c) $\int_0^2 xe^{-x}\ dx$

5.3 Aturan Simpson

Perhatikan suatu daerah di bawah kurva $y = f(x)$ antara x_0 dan x_2. Pada aturan Simpson, luasan ini dihampiri oleh luas daerah di bawah parabola yang melalui titik-titik (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) dengan $x_k = x_0 + kh$, $f_k = f(x_k)$, $k = 0,\ 1,\ 2$. Kita akan menghitung luas daerah di bawah parapola ini untuk mendapatkan aturan Simpson.

Misalkan persamaan parabola tersebut adalah

$$P_2(x) = A(x - x_0)^2 + B(x - x_0) + f_0. \tag{5.18}$$

5.3.1 Aturan Simpson Majemuk

Misalkan n suatu bilangan genap dan $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ suatu partisi seragam sedemikian hingga lebar setiap subinterval adalah h. Jadi,

$$h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i \qquad \text{untuk} \qquad 0 \leq i < n.$$

Kita tahu bahwa,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \tag{5.26}$$

Dengan menggunakan (5.25), hampiran integral (5.26) dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\}}{3} + \frac{h\{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\}}{3} \\
&\quad \ldots \\
&\qquad + \frac{h\{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\}}{3} \\
&= \frac{h}{3}\{[f_0+f_n]+4[f_1+f_3+\ldots+f_{n-1}] \\
&\qquad +2[f_2+f_4+\ldots+f_{n-2}]\}.
\end{aligned}$$

Sebagai rangkuman dapat kita tulis

Aturan Simpson Majemuk:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left\{ f_0 + f_n + 4\sum_{k=1}^{n/2} f_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} f_{2k} \right\}, \tag{5.27}$$

dengan n genap, $h = (b-a)/n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{i+1} = x_i + h$, $f_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq n-1$.

CONTOH 5.4.
Dengan menggunakan aturan Simpson, hampiri integral fungsi $f(x) = 1/x$ *pada* $[1, 9]$ *dengan delapan subinterval seragam.*
Penyelesaian:

5.3.2 Analisis Galat

TEOREMA 5.2 (GALAT ATURAN TRAPESIUM).
Misalkan $f''(x)$ ada dan kontinyu pada interval $[a,\ b]$ dan aturan trapesium dengan lebar sub-subinterval sama, katakan h, digunakan untuk menghampiri integral $f(x)$ pada $[a,\ b]$. Misalkan I adalah nilai integral yang sesungguhnya dan T nilai hampiran dengan aturan trapesium. Maka terdapat suatu bilangan $c \in (a,\ b)$ sedemikian hingga

$$|I - T| = \frac{(b-a)}{12} h^2 |f''(c)| = O(h^2) \qquad (5.28)$$

BUKTI: Misalkan $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$. Maka $F'(t) = f(t)$, $F''(t) = f'(t)$, $F'''(t) = f''(t), \ldots, F^{(n)}(t) = f^{(n-1)}(t)$. Perhatikan deret Taylor untuk F:

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2 F''(a)}{2!} + \frac{h^3 F'''(a)}{3!} + \ldots.$$

Mengingat $F(a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$ dan $F(a+h) = \int_a^{a+h} f(x)\, dx$, maka kita peroleh persamaan

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx = hf(a) + \frac{h^2 f'(a)}{2!} + \frac{h^3 f''(a)}{3!} + \ldots. \qquad (5.29)$$

Sekarang perhatikan deret Taylor untuk f:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2!} + \frac{h^3 f'''(a)}{3!} + \ldots.$$

Dengan menambahkan $f(a)$ pada kedua ruas kita dapatkan

$$f(a) + f(a+h) = 2f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{2!} + \frac{h^3 f'''(a)}{3!} + \ldots.$$

Jika kedua ruas persamaan terakhir kita kalikan $h/2$, maka kita peroleh

$$\frac{h(f(a) + f(a+h))}{2} = hf(a) + \frac{h^2 f'(a)}{2} + \frac{h^3 f''(a)}{2.3!} + \frac{h^4 f'''(a)}{2.4!} + \ldots \qquad (5.30)$$

yang berarti

$$\text{Galat mutlak } = |I - T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(C)| = O(h^2).$$

■

Teorema 5.3 (Galat Aturan Simpson).
Misalkan $f^{(4)}(x)$ ada dan kontinyu pada $[a, b]$. Misalkan aturan Simpson dengan lebar sub-subinterval sama, katakan h, digunakan untuk menghampiri integral I. Jika nilai hampiran adalah S, maka terdapat $C \in (a, b)$ sedemikian hingga

$$|I - S| = \frac{(b-a)}{180} h^4 |f^{(4)}(C)| = O(h^4) \tag{5.31}$$

Catatan:
Aturan trapesium memberikan nilai eksak terhadap integral polinomial linier, sedangkan aturan Simpson memberikan nilai eksak terhadap integral polinomial berderajad kurang atau sama dengan tiga. Hal ini terlihat pada rumus galat mutlak di atas. Jika $f(x)$ linier, maka $f''(x) = 0$ sehingga galat mutlak untuk aturan trapesium sama dengan nol. Jika $f(x)$ polinomial kubik, maka $f^{(4)}(x) = 0$ sehingga galat mutlak untuk aturan Simpson sama dengan nol.

LATIHAN 5.3

1. Tulis algoritma untuk menghitung hampiran integral fungsi $f(x)$ pada interval $[a, b]$ dengan menggunakan aturan Simpson. Implementasikan algoritma tersebut dengan program MATLAB.

2. Dengan menggunakan program MATLAB tersebut, hitung hampiran integral-integral tentu di bawah ini dengan membagi interval integrasi menjadi $n = 10$, 20, 40, 80, dan 160 subinterval. Gunakan perhitungan sampai enam angka di belakang koma.

   (a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (b) $\int_0^1 2 + \sin(2\sqrt{x})\,dx$ (c) $\int_{0.25}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

   (d) $\int_0^4 x^2 e^{-x}\,dx$ (e) $\int_0^2 2\cos x\,dx$ (f) $\int_0^{\pi} \sin(2x) e^{-x}\,dx$

3. Dengan menggunakan aturan Simpson, hitunglah hampiran panjang kurva $y = f(x)$ pada interval $[a, b]$ yang dinyatakan dalam

Turunkan bahwa aturan Simpson (gunakan $N = 2$, $h = (b-a)/2$) menghasilkan nilai eksak jika digunakan untuk fungsi polinomial berderajad ≤ 3, $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ pada interval $[a,\ b]$.

7. Gunakan aturan Simpson untuk menghampiri nilai-nilai integral tentu di bawah ini. Berapa subintervalkah yang diperlukan agar hampiran yang diperoleh untuk setiap integral memiliki tingkat keakuratan 5×10^{-9}.

   (a) $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x\ dx$ (b) $\int_2^3 \frac{1}{5-x}\ dx$ (c) $\int_0^2 xe^{-x}\ dx$

   (d) $\int_0^2 e^{-3x} \sin 3x\ dx$ (e) $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^2}\ dx$ (f) $\int_2^5 \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)^2}\ dx$

8. Tentukan banyaknya subinterval yang diperlukan untuk menghampiri integral tentu $\int_a^1 x^{-1/2}\ dx$ akurat sampai empat angka di belakang koma, dengan menggunakan aturan Simpson, jika (i) $a = 0.1$, (ii) $a = 0.01$, (iii) $a = 0.0001$, dan (iv) $a = 0$.

5.4 Integrasi Romberg

5.4.1 Rumus Rekursif Trapesium, Simpson, Boole

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada $[a,\ b]$. Misalkan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ suatu partisi $[a,\ b]$ sedemikian hingga $x_k = x_0 + kh$ dengan $h = (b-a)/n$ untuk $k = 0, 1, 2, 3, ..., n$. Perhatikan aturan trapesium untuk fungsi f terhadap partisi di atas (untuk keperluan pembahasan pada bagian ini kita gunakan notasi kuadratur dengan menyertakan cacah dan lebar subinterval),

$$\begin{aligned} T_n(f,h) &= \frac{h}{2}\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n\} \\ &= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n\} + h\{f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1}\} \\ &= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n\} + h\sum_{k=1}^{n-1} f_k. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Sekarang, jika lebar setiap subinterval diperkecil separohnya, maka *dengan*

$$T_0 = T_1(f,h) = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) \qquad \text{dan} \qquad T_k = T_{2^k}(f, \frac{h}{2^k}), \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Barisan aturan trapesium tersebut memenuhi hubungan

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}, \quad \text{dengan} \quad f_i = f(a + i\frac{h}{2^{k+1}}). \qquad (5.36)$$

Dalam menghitung hampiran $\int_a^b f(x)\ dx$ dengan aturan trapesium rekursif, kita lakukan langkah-langkah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} h &= b - a \\ T_0 &= \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \\ T_1 &= \frac{T_0}{2} + \frac{h}{4}f_1 \\ T_2 &= \frac{T_1}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3) \\ T_3 &= \frac{T_2}{2} + \frac{h}{16}(f_1 + f_3 + f_5) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Gambar 5.7 menyajikan fungsi MATLAB `traperekursif` untuk menghitung hampiran integral dengan aturan trapesium rekursif.

CONTOH 5.5.
Hitunglah hampiran integral $\int_1^5 dx/x$ *dengan menggunakan aturan trapesium dengan cacah interval 1, 2, 3, 4, dan 5. Hitung pula galat masing-masing hampiran dengan mengingat bahwa* $\int_1^5 dx/x = \ln(5) = 1.60943791243410$.

Penyelesaian:

Kita gunakan fungsi MATLAB `traperekursif.m` *untuk menyelesaikan soal ini sebagai berikut.*

```
>> f=inline('1./x')
f =
```

TEOREMA 5.5 (ATURAN SIMPSON REKURSIF).
Misalkan $\{T_n : n = 0, 1, 2, 3, ...\}$ adalah barisan aturan trapesium majemuk yang dihasilkan dengan aturan pada Teorema 5.4, dan S_n adalah aturan Simpson majemuk untuk fungsi f dengan 2^n subinterval pada interval $[a, b]$. Hubungan antara aturan Simpson majemuk dan aturan trapesium majemuk adalah

$$S_n = \frac{4T_n - T_{n-1}}{3}, \quad \text{untuk} \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{5.37}$$

Bukti teorema tersebut tidak disajikan di sini, diserahkan kepada pembaca yang penasaran.

Dengan Teorema 5.5 kita dapat menghitung hampiran integral menggunakan aturan Simpson tidak secara langsung melainkan dengan aturan trapesium.

CONTOH 5.6.
Berikut ditunjukkan bagaimana menggunakan fungsi MATLAB `traperekursif.m` *untuk menghitung S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, sebagai hampiran-hampiran integral $\int_1^5 dx/x$ beserta galatnya.*

```
>> f=inline('1./x')
f =
     Inline function:
     f(x) = 1./x
>> T=[];I=log(5);
>> for n=0:5, %hitung barisan trapesium dulu
Tn=traperekursif(f,n,1,5); T=[T;Tn]; end
>> S=(4*T(2:6)-T(1:5))/3; % brsan kuad Simpson mjemuk
>> [S S-I]
ans =
   1.68888888888889   0.07945097645479
   1.62222222222222   0.01278430978812
   1.61084656084656   0.00140864841246
   1.60955234709105   0.00011443465695
   1.60944575350219   0.00000784106809
```

Jika dibandingkan dengan aturan trapesium, dari hasil pada contoh di atas, terlihat bahwa aturan Simpson memberikan hampiran yang lebih baik. □

Hasil pada teorema berikut ini menyajikan hubungan antara aturan

5.4.2 Metode Romberg

Aturaan Simpson rekursif dan aturaan Boole rekursif merupakan kasus-kasus khusus integrasi Romberg. Pada proses integrasi Romberg, mula-mula kita hitung kuadratur dengan lebar langkah h dan $2h$. Untuk menurunkan galat hampiran integral dari $O(h^{2n})$ menjadi $O(h^{2n+2})$ dapat digunakan ekstrapolasi Richardson, seperti dinyatakan dalam teorema berikut ini.

TEOREMA 5.7 (INTEGRASI ROMBERG–EKSTRAPOLASI RICHARDSON). *Jika diketahui dua buah hampiran $R_k(f,h)$ dan $R_k(f,2h)$ untuk nilai Q yang memenuhi*

$$Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + \ldots$$

dan

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + \ldots,$$

maka

$$Q = \frac{4^k R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2}). \tag{5.40}$$

Jika didefinisikan barisan kuadratur $\{R(i,j) : i \geq j, j = 1,2,3,\ldots\}$ untuk hampiran integral $f(x)$ pada $[a,\ b]$ sebagai

$$R(i,1) = T_{i-1}, \quad i \geq 1 \quad \text{(barisan aturan trapesium majemuk)} \tag{5.41}$$
$$R(i,2) = S_{i-1}, \quad i \geq 2 \quad \text{(barisan aturan Simpson majemuk)}, \tag{5.42}$$
$$R(i,3) = B_{i-1}, \quad i \geq 3 \quad \text{(barisan aturan Boole majemuk)}, \tag{5.43}$$

maka integrasi Romberg untuk meningkatkan keakuratan hampiran integral dapat ditulis sebagai

Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson:

$$R(j,k) = \frac{4^{k-1} R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^{k-1} - 1}, \tag{5.44}$$

untuk $2 \leq k \leq j$, dengan nilai awal adalah kuadratur trapesium

$$R(1,1) = T_0 = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Algoritma Romberg menghasilkan suatu jajaran bilangan segitiga,

$$\begin{aligned}
R(2,1) &= R(1,1)/2 + (\pi/4)f(0+\pi/4) \\
&= 0.392699 + (\pi/4)\pi^2/16 + \pi/4 + 1\cos(\pi/4) \\
&= 1.7268126 \\
R(3,1) &= R(2,1)/2 + (\pi/8)(f(0+\pi/8) + f(0+3\pi/8)) = 1.9605341 \\
R(4,1) &= \frac{R(3,1)}{2} + \frac{\pi}{16}(f(0+\frac{\pi}{16}) + f(0+\frac{3\pi}{16}) + f(0+\frac{5\pi}{16}) + f(0+\frac{7\pi}{16})) \\
&= 2.0187937
\end{aligned}$$

Sekarang dengan menggunakan rumus (5.44) kita dapat melengkapi jajaran bilangan segitiga. Misalnya, $R(2,2)$ dihitung sebagai

$$\begin{aligned}
R(2,2) = R(2,1) + \frac{R(2,1) - R(1,1)}{3} \\
= 1.7268126 + \frac{1.7268126 - 0.7853981}{3} = 2.0401674
\end{aligned}$$

Perhitungan selengkapnya dapat dilakukan dengan menggunakan MATLAB sebagai berikut. Perhatikan, di sini kita hanya menggunakan fungsi MATLAB `traperekursif` *yang sudah kita miliki.*

```
>> f=inline('(x.^2+x+1).*cos(x)')
f =
     Inline function:
     f(x) = (x.^2+x+1).*cos(x)
>> T=[];
>> for n=0:5, % hitung kolom pertama
Tn=traperekursif(f,n,0,pi/2); T=[T;Tn];end
>> i=[2:6]'; S(i)=(4*T(i)-T(i-1))/3; % kolom ke-2
>> i=[3:6]'; B(i)=(16*S(i)-S(i-1))/15;% kolom ke-3
>> i=[4:6]'; R4(i)=(64*B(i)-B(i-1))/63;% kolom ke-4
>> i=[5:6]'; R5(i)=(256*R4(i)-R4(i-1))/255;%klm ke-5
>> R6(6)=(4^5*R5(6)-R5(5))/(4^5-1); % kolom ke-6
>> [T S' B' R4' R5' R6'] % tampilkan matriksnya
```

```
ans =
   0.7853982   0           0           0           0           0
   1.7268127   2.0406175   0           0           0           0
   1.9605342   2.0384413   2.0382963   0           0           0
   2.0187940   2.0382139   2.0381987   2.0381972   0           0
   2.0333473   2.0381985   2.0381974   2.0381974   2.0381974   0
   2.0369850   2.0381975   2.0381974   2.0381974   2.0381974   2.0381974
```

7. Dengan menggunakan penalaran yang sama dengan penjelasan integrasi Romberg untuk aturan trapesium rekursif, turunkan rumus integrasi Romberg untuk aturan Simpson Rekursif (yakni aturan Simpson dengan 2^n subinterval).

8. Tentukan derajad keakuratan integrasi Romberg dengan aturan trapesium rekursif dan aturan Simpson Rekursif. Manakah yang memiliki derajad keakuratan lebih tinggi?

5.5 Integrasi Gauss-Legendre

5.5.1 Kuadratur Gauss

Misalkan kita disajikan sebuah tabel sebagai berikut:

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

Jika jarak setiap dua nilai x berturutan sama, kita dapat menggunakan salah satu rumus Newton – Cotes (aturan trapesium, aturan Simpson, atau aturan Boole) untuk menghitung hampiran integral. Akan tetapi, jika diketahui suatu fungsi secara eksplisit, kita perlu memilih titik-titik di mana nilai fungsi dihitung. Kuadratur Gauss berkenaaan dengan pemilihan titik-titik tersebut, sedemikian hingga keakuratan hampiran meningkat. Kuadratur Gauss memberikan suatu prosedur pemilihan titik-titik $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$ pada interval $[a,\ b]$ dan konstanta $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n$ untuk meminimumkan galat hampiran

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \qquad \text{untuk integral} \qquad \int_a^b f(x)\ dx$$

untuk sebarang fungsi $f(x)$. Nilai-nilai x_i dikenal sebagai *absis* dan nilai-nilai c_i dikenal sebagai *bobot*. Nilai-nilai ini dihitung dengan menggunakan polinomial Legendre.

Polinomial Legendre berderajad n didefinisikan sebagai

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{5.45}$$

dan bandingkan hasilnya dengan aturan trapesium dengan $h = 2$ dan aturan Simpson dengan $h = 1$.

Penyelesaian:

Misalkan G_2 menyatakan hampiran kuadratur Gauss dua titik, $T(f,2)$ menyatakan hampiran trapesium dan $S(f,1)$ menyatakan hampiran Simpson. Maka

$$\begin{aligned}
G_2 &= f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \\
&= f(-0.57735) + f(0.57735) = 0.70291 + 0.38800 = 1.09091 \\
T(f,2) &= f(-1) + f(1) = 1 + 1/3 = 1.33333 \\
S(f,1) &= \frac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{3} = \frac{1 + 4(1/2) + 1/3}{3} = \frac{10}{9} = 1.11111
\end{aligned}$$

Nilai yang sesungguhnya adalah $\ln(3) = 1.09861$.
Galat di dalam aturan kuadratur Gauss –Legendre = 0.0077.
Galat di dalam aturan Simpson = -0.01250.
Galat di dalam aturan trapesium = -0.23472.

Aturan kuadratur Gauss – Legendre adalah yang terbaik karena memiliki galat terkecil di antara galat kedua aturan lainnya dan juga memerlukan perhitungan nilai fungsi satu kurang dari yang diperlukan oleh aturan Simpson. □

5.5.3 Aturan Gauss – Legendre Tiga Titik

Jika $f(x)$ kontinu pada $[-1,\ 1]$, maka

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_3(f) = \frac{5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})}{9}.$$

Rumus di atas memiliki derajad keakuratan $n = 5$. Rumus tersebut memberikan hasil eksak untuk polinomial berderajad 5 atau kurang. Jika $f(x)$ termasuk dalam kelas $C^{(6)}$ pada $[-1,\ 1]$, maka

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})}{9} + E_3(f) \tag{5.48}$$

dengan galat $E_3(f) = f^{(6)}(c)/15750$.

Tabel 5.2 memberikan nilai-nilai absis dan bobot pada rumus kuadratur Gauss dengan bervariasi banyak titik.

Maka relasi

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f\{\frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)x}{2}\}\frac{b-a}{2}\,dx$$

digunakan untuk mendapatkan rumus kuadratur

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} f\{\frac{(a+b)}{2} + \frac{(b-a)x_{n,k}}{2}\}.$$

CONTOH 5.10.
Gunakan aturan Gauss – Legendre tiga titik untuk menghitung hampiran $\int_1^5 \frac{dt}{t}$.
Penyelesaian:
Di sini $a = 1$ *dan* $b = 5$. *Maka*

$$\begin{aligned} G_3(f) &= 2\frac{5f(3-2(.6)1/2) + 8f(3+2*0) + 5f(3+2(.6)1/2)}{9} \\ &= 2\frac{3.446359 + 2.666667 + 1.099096}{9} = 1.602694 \end{aligned}$$

Nilai yang sesungguhnya adalah $\ln(5) = 1.609438$. *Dengan menggunakan aturan Simpson kita dapatkan*

$$\begin{aligned} S(f,2) &= 2\{f(1) + 4f(3) + f(5)\}/3 \\ &= 2\{1 + 4(1/3) + 1/5\}/3 \\ &= 2(38/15)/3 = 76/45 = 1.68888888 \end{aligned}$$

Aturan Simpson memberikan hampiran yang lebih jelek daripada aturan kuadratur Gauss. Kedua aturan tersebut memerlukan sama banyak perhitungan nilai fungsi. □

LATIHAN 5.5

1. Tulis algoritma untuk menghitung kuadratur Gauss–Legendre dengan dua, tiga, empat, dan lima titik (absis). Implementasikan masing-masing algoritma dengan program MATLAB.

2. Gunakan kuadratur Gauss dua titik untuk menghitung nilai-nilai hampiran integral-integral di bawah ini. Gunakan perhitungan

memuat $2n$ variabel yang tak diketahui nilainya. Untuk menentukan nilai-nilai $x_{n,k}$ dan $c_{n,k}$ diperlukan $2n$ syarat yang saling bebas. Salah satu cara adalah menyaratkan kuadratur memberikan nilai eksak untuk fungsi $f(x)$ yang merupakan polinomial-polinomial berderajad kurang atau sama dengan $2n-1$. Dengan menggunakan $f(x) = 1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{2n-1}$, tuliskan sebuah sistem persamaan yang diperoleh. Apakah sistem persamaan tersebut merupakan suatu SPL? Cobalah selesaikan sistem persamaan tersebut untuk n =2 dan 3. Bandingkan hasil perhitungan Anda dengan nilai-nilai pada Tabel 5.2. Cara lain adalah dengan mengingat bahwa nilai-nilai $x_{n,k}$ merupakan pembuat-pembuat nol polinomial Legendre berderajad n. Selanjutnya nilai-nilai $c_{n,k}$ dapat dicari dengan menyaratkan kuadratur memberikan nilai eksak untuk fungsi $f(x)$ yang merupakan polinomial-polinomial berderajad kurang atau sama dengan $n-1$. Cobalah cara kedua ini untuk $n = 3$ dan 4.

5.6 Perhitungan Kuadratur dengan MATLAB

MATLAB telah menyediakan perintah-perintah untuk menghitung **kuadratur** atau nilai integral tentu suatu fungsi secara numerik. Terdapat beberapa perintah (fungsi) MATLAB yang dapat digunakan untuk menghitung nilai integral tentu secara numerik, yakni `quad, quad8, quadl`. Masing-masing perintah berkaitan dengan metode khusus dalam metode numerik, yang beberapa di antaranya seperti sudah dijelaskan pada bab ini. Perintah `quad` menggunakan metode Simpson, sedangkan perintah `quad8` menggunakan metode Newton – Cotes. Pada MATLAB versi terbaru (mulai versi 6.x) tersedia perintah `quadl`, yang menggunakan metode lebih baru, yakni kuadratur Lobatto. Perintah `quadl` juga merupakan pengganti perintah `quad8` yang pada versi terbaru MATLAB sudah dianggap kadaluwarsa. MATLAB juga menyediakan perintah untuk menghitung integral ganda, yakni `dblquad`. Berikut dijelaskan petunjuk dan contoh pemakaian fungsi-fungsi MATLAB tersebut. Uraian ini didasarkan pada panduan online (*help*) MATLAB versi 6.1.

Sintaks pemakaian perintah `quad`:

```
q = quad(f,a,b)
q = quad(f,a,b,tol)
q = quad(f,a,b,tol,trace)
```


Sintaks `q = quad8(f,a,b,tol,trace,p1,p2,...)` sama seperti di atas dengan parameter-parameter tambahan `p1,p2,...` akan dimasukkan ke dalam perhitungan fungsi `f, f(x,p1,p2,...)`.
Sintaks `[q,y] = quad8(...)` akan menyimpan nilai-nilai fungsi selama proses iterasi ke dalam vektor `y`.

Sintaks pemakaian perintah `quadl` (pada MATLAB versi 6.x dan sesudahnya):

```
q = quadl(f,a,b)
q = quadl(f,a,b,tol)
q = quadl(f,a,b,tol,trace)
q = quadl(f,a,b,tol,trace,p1,p2,...)
[q,y] = quadl(f,a,b,...)
```

Sintaks `q = quadl(f,a,b)` menghitung hampiran nilai $\int_a^b f(x)\ dx$ menggunakan metode Gauss/Lobatto adaptif secara rekursif dengan batas toleranasi galat 10^{-6}.
Sintaks `q = quadl(f,a,b,tol)` sama seperti di atas namun menggunakan batas toleransi galat sendiri, yakni `tol`, sebagai pengganti nilai asli `1.0e-6`=0.00001. Semakin besar nilai batas toleransi galat, semakin cepat proses perhitungannya namun hasilnya kurang akurat.
Sintaks `q = quadl(f,a,b,tol,trace)` sama seperti di atas, dan jika nilai `trace` nonnegatif, maka MATLAB menampilkan jejak nilai-nilai fungsi selama proses iterasi.
Sintaks `q = quadl(f,a,b,tol,trace,p1,p2,...)` sama seperti di atas dengan parameter-parameter tambahan `p1,p2,...` akan dimasukkan ke dalam perhitungan fungsi `f, f(x,p1,p2,...)`.
Sintaks `[q,y] = quadl(...)` akan menyimpan nilai-nilai fungsi selama proses iterasi ke dalam vektor `y`.

Catatan:

1. Gunakan operator elemen demi elemen (*elementwise*): `.*` (perkalian), `./` (pembagian) dan `.^` (perpangkatan) di dalam definisi fungsi `f` agar `f` dapat menerima masukan berupa vektor.

2. Fungsi `f` dapat didefinisikan dengan beberapa cara:

   (a) Langsung dituliskan rumus fungsinya di dalam perintah MATLAB, misalnya

   ```
   q = quad('1./(x.^3-2*x-5)',0,2);
   ```

```
     Inline function:
     f(x) = x.*exp(-x.^2+3)
>>I1=quad(f,0,2)
I1 =
    9.8588
>>I2=quad8(f,0,2)

Warning: QUAD8 is obsolete.  QUADL is its recommended replacement.
> In C:\MATLAB6p1\toolbox\MATLAB\funfun\quad8.m at line 35

I2 =
    9.8588
>>I3=quadl(f,0,2)
I3 =
    9.8588
```

Tampaknya ketiga metode memberikan hampiran nilai integral secara sama. Untuk menguji apakah benar demikian kita tampilkan ketiga nilai tersebut dengan `format long`.

```
>>format long
>>[I1, I2, I3]
ans =

   9.85882872165450   9.85882874076409   9.85882874101569
```

Terlihat bahwa ketiga metode di atas sebenarnya memberikan nilai yang berbeda, namun jika dibulatkan sampai 7 angka di belakang koma hasilnya sama. Sebenarnya ketiga metode di atas menggunakan batas toleransi 1.e-6 atau 0.000001. Kita dapat menentukan sendiri batas toleransinya.

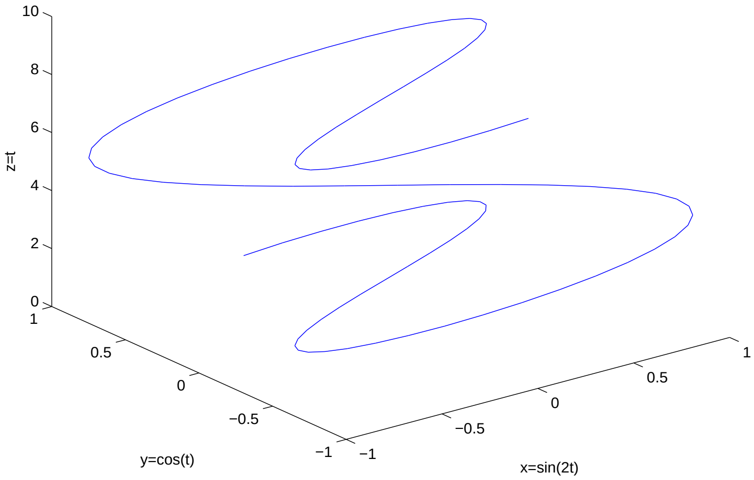
```
>>I=quad(f,0,2,0.00000001)
I =
   9.85882874113062
```

Ternyata hasil yang diperoleh berbeda dengan hasil sebelumnya, dan mendekati hasil yang diperoleh dengan perintah `quadl`.

Dengan MATLAB kita juga dapat menghitung hampiran integral secara sederhana. Interval integrasi dibagi menjadi beberapa subinterval sama lebar. Selanjutnya, luas daerah di bawah kurva dihampiri dengan jumlah luas persegi panjang dengan lebar sub-subinterval dan panjang nilai fungsi di titik tengah sub-subinterval.

dengan $t \in [0,\ 3\pi]$. *Kurva tersebut dapat diplot dengan menggunakan fungsi MATLAB* `plot3` *sebagai berikut, dan hasilnya ditunjukkan pada Gambar 5.9.*

```
>>t = 0:0.1:3*pi;  plot3(sin(2*t),cos(t),t)
```



Gambar 5.9: Kurva parametrik ruang dengan parameter $t \in [0,\ 3\pi]$

Sebagaimana diketahui (lihat buku-buku Kalkulus), panjang kurva yang dinyatakan dalam persamaan parametrik sama dengan integral norm turunan persamaan-persamaan parametrik tersebut, yakni:

$$L = \int_0^{3\pi} \sqrt{4\cos(2t)^2 + \sin(t)^2 + 1}\, dt.$$

Untuk menggunakan perintah-perintah MATLAB sekarang perlu didefinisikan fungsi yang diintegralkan tersebut.

```
>>kurva = inline('sqrt(4*cos(2*t).^2 + sin(t).^2 + 1)')
kurva =
     Inline function:
     kurva(t) = sqrt(4*cos(2*t).^2 + sin(t).^2 + 1)
```

```
Q =
  -9.86960437725457
```

Berikut adalah contoh penggunaan integral ganda untuk menghitung volume setengah bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

```
>>dblquad(inline('sqrt(max(1-(x.^2+y.^2),0))'),-1,1,-1,1)


ans =
   2.09441094510923
```

□

Dalam contoh terakhir definisi fungsinya menggunakan perintah `max(1-(x.^2+y.^2),0)` untuk menghindari perhitungan akar negatif atau untuk memberikan nilai fungsinya nol di luar daerah integrasi.

Referensi tentang metode kuadratur yang diimplementasikan pada MATLAB dapat dilihat pada:

> Gander, W. and W. Gautschi, "Adaptive Quadrature - Revisited", BIT, Vol. 40, 2000, pp. 84-101. yang dapat diakses di alamat Internet: http:// www.inf.ethz.ch/personal/gander.

LATIHAN 5.6

1. Hitunglah integral $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-x^2/2}\, dx$ dengan menggunakan perintah `quad`, `quad8`, dan `quadl`. Bandingkan hasilnya (gunakan `format long`).
2. Hitunglah integral no. 1 dengan cara membagi interval integrasi menjadi sub-subinterval selebar 0.1, 0.05, 0.01, dan 0.001, seperti pada Contoh 5.11. Bandingkan hasilnya dengan nilai-nilai yang diperoleh pada nomor 1.
3. Hitunglah luas sebuah lingkaran berjari-jari 2 dengan menggunakan ketiga perintah MATLAB di atas. Bandingkan hasilnya dengan nilai yang diperoleh dari rumus luas lingkaran, yakni $4\pi \approx 12.56637061435917$.

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx S_4(f) = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \qquad \text{(aturan Simpson } \frac{3}{8}\text{)}$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx B_5(f) = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4). \text{ (aturan Boole).}$$

Aturan jumlah kiri Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi nyata satu variabel yang terdefinisi pada interval $[a,\ b]$. Jika interval $[a,\ b]$ dipartisi menjadi n subinterval berbentuk $[x_k,\ x_{k+1}]$ sedemikian hingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k,$$

dengan $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Jika $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = h > 0$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n(f) = h\sum_{k=0}^{n-1} f_k,$$

dengan $f_k = f(x_k)$, $x_k = a + kh$.

Aturan jumlah kanan Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi nyata satu variabel yang terdefinisi pada interval $[a,\ b]$. Jika interval $[a,\ b]$ dipartisi menjadi n subinterval berbentuk $[x_k,\ x_{k+1}]$ sedemikian hingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x_k,$$

dengan $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Jika $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = h > 0$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n(f) = h\sum_{k=1}^{n} f_k,$$

dengan $f_k = f(x_k)$, $x_k = a + kh$.

Aturan jumlah tengah Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi nyata satu variabel yang terdefinisi pada interval $[a,\ b]$. Jika interval $[a,\ b]$ dipartisi menjadi n subinterval berbentuk $[x_k,\ x_{k+1}]$, yang mempunyai titik tengah $t_k = (x_k + x_{k+1})/2$, sedemikian hingga $a = x_0 < x_1 <$

Jika aturan Simpson dengan lebar sub-subinterval sama, katakan h, digunakan untuk menghampiri integral I, maka terdapat $C \in (a,\ b)$ sedemikian hingga

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}\left\{ f_0 + f_n + 4\sum_{k=1}^{n/2} f_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} f_{2k} \right\} + E(S,f),$$

dengan $E(S,f) = \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(C) = O(h^4)$.

Aturan Trapesium Rekursif Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada $[a,\ b]$ dan $h = (b-a)$. Untuk $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ atau $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k, \ldots$, misalkan

$$T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3, \ldots,\ T_k, \ldots,$$

adalah barisan aturan trapesium dengan lebar sub-subinterval $n = h/2^0, h/2^1, h/2^2, h/2^3, \ldots, h/2^k, \ldots$. Barisan aturan trapesium tersebut dapat dibentuk secara rekursif sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
T_0 &= \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) \\
T_1 &= \frac{T_0}{2} + \frac{h}{4} f_1 \\
T_2 &= \frac{T_1}{2} + frach8(f_1 + f_3) \\
T_3 &= \frac{T_2}{2} + \frac{h}{16}(f_1 + f_3 + f_5) \\
&\vdots \\
T_{k+1} &= \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}, \quad \text{dengan} \quad f_i = f(a + i\frac{h}{2^{k+1}}). \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Aturan Simpson Rekursif Misalkan $\{T_n\ :\ n\ =\ 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ adalah barisan aturan trapesium dan S_n adalah aturan Simpson majemuk untuk fungsi f dengan 2^n subinterval pada interval $[a,\ b]$. Barisan aturan Simpson majemuk dapat dibentuk dari barisan aturan trape-

$f \in C^{(6)}[-1,\ 1]$, maka

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})}{9} + E_3(f)$$

dengan galat $E_3(f) = f^{(6)}(c)/15,750$.

Integrasi Numerik dengan MATLAB Berikut adalah fungsi-fungsi MATLAB yang dapat digunakan untuk menghitung nilai-nilai kuadratur.

Fungsi `quad` menghitung kuadratur dengan menggunakan metode Simpson.

Fungsi `quad8` menghitung kuadratur dengan menggunakan metode Newton – Cotes.

Pada MATLAB versi terbaru (mulai versi 6.x) tersedia perintah `quadl`, yang menggunakan metode lebih baru, yakni kuadratur Lobatto. Perintah `quadl` juga merupakan pengganti perintah `quad8` yang pada versi terbaru MATLAB sudah dianggap kadaluwarsa.

Fungsi `dblquad` berguna untuk menghitung integral ganda.