# 2 SISTEM PERSAMAAN LINIER

Sistem persamaan linier merupakan salah satu model dan masalah matematika yang banyak dijumpai di dalam berbagai disiplin, termasuk matematika, statistika, fisika, biologi, ilmu-ilmu sosial, teknik, dan bisnis. Sistem-sistem persamaan linier muncul secara langsung dari masalah-masalah nyata, dan merupakan bagian dari proses penyelesaian masalah-masalah lain, misalnya penyelesaian sistem persamaan non-linier simultan.

Suatu sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah berhingga persamaan linier dalam sejumlah berhingga variabel. Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai-nilai variabel-variabel tersebut yang memenuhi semua persamaan linier yang diberikan.

Pada dasarnya terdapat dua kelompok metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier. Metode pertama dikenal sebagai metode **langsung**, yakni metode yang mencari penyelesaian suatu sistem persamaan linier dalam langkah berhingga. Metode-metode ini dijamin berhasil dan disarankan untuk pemakaian secara umum. Kelompok kedua dikenal sebagai metode **tak langsung** atau metode **iteratif**, yang bermula dari suatu hampiran penyelesaian awal dan kemudian berusaha memperbaiki hampiran dalam tak berhingga namun langkah konvergen. Metode-metode iteratif digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar, seperti sistem-sistem yang banyak dijumpai dalam sistem persamaan diferensial.

## 2.1 Pengertian dan Contoh

Suatu persamaan dalam matematika merupakan sebuah ekspresi kesamaan (memuat tanda sama dengan, "=") yang melibatkan konstanta, variabel, dan operasi-operasi hitung/matematika. Di dalam sebuah persamaan, komponen-komponen yang dijumlahkan atau dikurangkan disemaan linier.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Kuantitas-kuantitas $a_{ij}$ (untuk $i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) disebut **koefisien**. Nilai koefisien-koefisien $a_{ij}$ dan ruas kanan $b_i$ pada setiap persamaan diketahui. Kuantitas-kuantitas $x_{ij}$ disebut **variabel**, yang nilainya belum diketahui dan hendak dicari.

Sistem persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$A\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

dengan $A$ adalah sebuah matriks $n \times n$:

*Penulisan SPL* (2.1) *dalam bentuk persamaan matriks. Pengertian* **matriks koefisien**, **matriks konstanta**, *dan* **matriks augmented.**

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

dan $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{B}$ adalah vektor-vektor $n$-komponen:

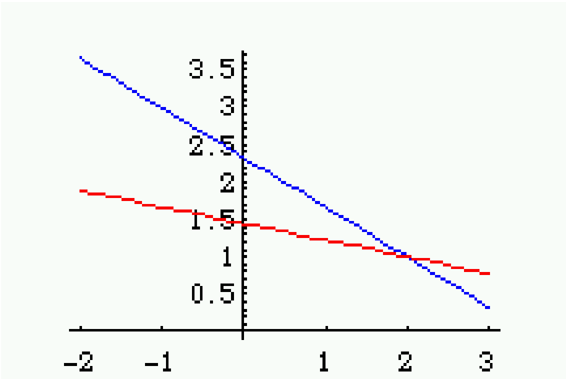
$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T \quad \mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)^T.$$

dengan pangkat $T$ menyatakan operasi **transpose** matriks, yakni mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.

Matriks $A$ disebut **matriks koefisien**, vektor kolom $\mathbf{B}$ sering disebut **vektor konstanta**. Gabungan matriks $A$ dan vektor kolom $\mathbf{B}$, yakni matriks $n \times (n+1)$ $(A \mid \mathbf{B})$, disebut **matriks augmented** dari SPL (2.1).

Apabila semua nilai $b_i = 0$ untuk $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, maka SPL (2.1) disebut **sistem homogen**. Jika terdapat $b_k \neq 0$ untuk suatu $1 \leq k \leq n$, maka SPL (2.1) disebut **sistem tak homogen**. Sistem homogen memegang peranan penting untuk mengetahui ada tidaknya penyelesaian SPL (2.1). Teorema berikut meringkaskan beberapa hasil penting tentang sistem-sistem persamaan linier.

*Perhatikan bahwa titik potong kedua garis tersebut merupakan penyelesaian SPL di atas.* □




Gambar 2.1: SPL dengan penyelesaian tunggal dapat disajikan dengan grafik kurva-kurva linier yang berpotongan di satu titik.

**CONTOH 2.2.**
*Perhatikan SPL*

*Contoh SPL dalam dua variabel yang tidak konsisten*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 9x_2 &= 7 \end{aligned}$$

*Jika persamaan kedua dikurangi tiga kali persamaan pertama maka kita dapatkan* $0 = 7 - 15$. *Ini artinya SPL tersebut tidak mempunyai penyelesaian. Apabila kita plot kedua garis yang menyajikan kedua persamaan linier di atas kita dapatkan dua buah kurva linier yang tidak berpotongan, seperti terlihat pada Gambar 2.2. Kedua garis tersebut saling sejajar satu sama lainnya.* □

**CONTOH 2.3.**
*Perhatikan SPL*

*Sebuah SPL yang terdiri atas dua buah persamaan linier yang ekivalen bersifat tidak konsisten.*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 10 \end{aligned}$$

## 2.2 Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss digunakan untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan linier dengan mengubah SPL tesebut ke dalam bentuk sistem persamaan linier berbentuk segitiga atas, yakni yang semua koefisien di bawah diagonal utamanya bernilai nol. Bentuk segitiga atas ini dapat diselesaikan dengan menggunakan substitusi (penyulihan) balik.

Untuk mendapatkan bentuk SPL segitiga dari SPL yang diketahui, metode eliminasi Gauss menggunakan sejumlah **operasi baris elementer** (OBE):

*Operasi baris elementer pada metode eliminasi Gauss*

1. Menukar posisi dua buah persamaan (dua baris matriks augmented)
2. Menambah sebuah persamaan (baris matriks augmented) dengan suatu kelipatan persamaan lain (baris lain)
3. Mengalikan sebuah persamaan (baris matriks augmented) dengan sebarang konstanta taknol.

Pemakaian operasi-operasi baris elementer di atas pada sebuah SPL tidak akan mengubah penyelesaikan SPL yang bersangkutan. Jelas bahwa penyelesaian sebuah SPL tidak tergantung pada susunan penulisan persamaan, sehingga operasi baris nomor 1 dapat dipakai. Dalam setiap persamaan, kedua ruas menyatakan nilai yang sama, sehingga operasi baris nomor 2 dapat digunakan. Demikian pula, operasi baris nomor 3 menghasilkan persamaan yang ekivalen.

Sekarang kita akan menjelaskan proses eliminasi Gauss ini melalui sebuah contoh. Perhatikan SPL

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16 \qquad \text{(A)}$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = -12 \qquad \text{(B)}$$
$$6x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 102 \qquad \text{(C)}$$

1. Eliminasi $x_1$ dari persamaan (B) dan (C):

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16 \qquad \text{(A)}$$
$$(B) - \frac{1}{3}(A) \quad =====> \quad \frac{11}{3}x_2 - 2x_3 = -\frac{52}{3} \qquad \text{(D)}$$
$$(C) - 2 \times (A) \quad =====> \quad -5x_2 + x_3 = 70 \qquad \text{(E)}$$

2. Eliminasi $x_2$ dari persamaan (E):

$$
\begin{array}{lcrr}
 & & 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16 & (A) \\
 & & \frac{11}{3}x_2 - 2x_3 = -\frac{52}{3} & (D) \\
(E) + \frac{15}{11} \times (D) & =====> & -\frac{19}{11}x_3 = \frac{510}{11} & (F)
\end{array}
$$

3. Hitung $x_3,\ x_2,\ x_1$:
Dari (F) diperoleh $x_3 = -\frac{510}{19}$. Masukkan nilai $x_3$ ke dalam (D) diperoleh $\frac{11}{3}x_2 = -\frac{52}{3} - \frac{1020}{19} = -\frac{4048}{57}$. Jadi, $x_2 = -\frac{368}{19}$. Masukkan nilai-nilai $x_3$ dan $x_2$ ke dalam (A) untuk mendapatkan $x_1$: $3x_1 = 16 + \frac{1472}{19} + \frac{1530}{19} = \frac{3306}{19}$, $x_1 = \frac{1102}{19} = 58$. Jadi, vektor penyelesaian SPL di atas adalah $(58, -\frac{368}{19}, -\frac{510}{19})$.

Metode Eliminasi Gauss terdiri atas dua tahap:

1. Eliminir secara berturut-turut variabel-variabel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ dari beberapa persamaan.

2. Masukkan kembali nilai-nilai yang sudah didapat ke dalam persamaan-persamaan tersebut untuk mendapatkan nilai-nilai yang belum diketahui di antara $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$.

Secara umum, misalkan kita mempunyai SPL seperti pada (2.1):

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & \vdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Berikut adalah langkah-langkah eliminasi Gauss untuk SPL (2.1):
**Tahap I: Eliminasi**

1. Eliminir $x_1$ dari persamaan-persamaan kedua, ketiga, ..., ke-$n$. Dengan kata lain, buat koefisien-koefisien $x_1$ pada persamaan-persamaan kedua, ketiga, ...ke-$n$ kenjadi nol. Hal ini dapat dilakukan dengan mengurangkan suatu kelipatan persamaan pertama dari persamaan-persamaan kedua, ketiga, ..., ke-$n$. Proses ini mengubah nilai-nilai koefisien-koefisien $x_i$, $a_{ij}$, dan konstanta

$(k+1)$, $k+2$, ..., dan ke–$n$, dengan cara mengurangkan kelipatan $m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ baris ke–$k$ dari baris ke–$i$, untuk $i = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n$:

$$a_{ij} = a_{ij} - m_{ik} \times a_{kj} \qquad \text{untuk} \quad k \le j \le n, \quad \text{dan} \tag{2.2}$$

$$b_i = b_i - m_{ik} \times b_k \qquad (k+1) \le i \le n. \tag{2.3}$$

4. Akhirnya, setelah kita berhasil mengeliminir variabel-variabel $x_1$, $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ dengan menggunakan operasi-operasi seperti di atas kita dapatkan SPL

*Akhir tahap I proses eliminasi Gauss adalah SPL bentuk segitiga atas yang ekivalen dengan SPL semula.*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ 0 & + & 0 & + & a_{33}x_3 & + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & \vdots & \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{2.4}$$

dengan matriks koefisien berupa matriks segitiga atas (elemen-elemen di bawah diagonal utama bernilai nol).

**Tahap II: Substitusi**

Pada tahap ini kita perlu menghitung nilai-nilai $x_n$, $x_{n-1}$, $x_{n-2}$, ..., $x_1$. Dari SPL (2.4) kita dapat melakukan substitusi mundur sbb.:

*Tahap II metode eliminasi Gauss adalah proses substitusi (penyulihan) mundur.*

1. Dari persamaan terakhir didapat $x_n = b_n/a_{nn}$.
2. Dengan memasukkan nilai $x_n$ ke dalam persamaan ke-$(n-1)$ diperoleh $x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1}$.
3. Secara umum, setelah diperoleh nilai-nilai $x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_{i+1}$ akan diperoleh $x_i$ dengan rumus

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j). \tag{2.5}$$

*Elemen pivot, baris pivot, penentuan pivot parsial*

Persamaan (2.5) dapat digunakan untuk menghitung nilai-nilai $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$ setelah $x_n$ diketahui.

## Permasalahan yang mungkin muncul

Perhatikan persamaan-persamaan (2.2), (2.3), (2.5). Dari rumus-rumus tersebut, tampak bahwa metode eliminasi Gauss akan gagal apabila nilai-

nilai $a_{kk}$ sama dengan nol, sebab nilai-nilai tersebut digunakan sebagai pembagi pada pengali $m_{ik}$ maupun di dalam proses substitusi mundur (2.5). Nilai $a_{kk} \neq 0$ pada baris ke-$k$ di mana $a_{kj} = 0$ untuk $j < k$, disebut **elemen pivot** pada langkah ke-$k$. Baris yang memuat elemen pivot disebut **baris pivot**. Eliminasi juga dapat menyebabkan hasil yang jelek apabila pada beberapa langkah digunakan pengali $m_{ik}$ yang nilainya lebih besar daripada 1. Hal ini dikarenakan pada langkah ke–$k$, galat pembulatan pada koefisien-koefisien $a_{k,k+1}$, $a_{k,k+2}$, ..., dan $a_{kn}$, serta $b_k$ diperbesar oleh faktor $m_{ik}$. Apabila nilai-nilai $m_{ik}$ pada langkah-langkah berurutan hampir sama besar, maka galat pembulatanya akan terakumulasi secara cepat, menyebabkan metode yang tidak stabil. Angka-angka signifikan mungkin juga akan hilang pada proses penyulihan mundur apabila terdapat elemen-elemen pivot yang bernilai sangat kecil. Salah satu metode untuk mengatasi masalah-masalah ini disebut metode **penentuan pivot parsial**, yang akan dijelaskan setelah kita bahas contoh berikut ini.

**CONTOH 2.5.**
*Selesaikan SPL di bawah ini dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.*

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8\\
2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20\\
x_1 + x_2 + x_3 &= -2\\
x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4
\end{aligned}$$

**Penyelesaian:**
*Matriks augmented-nya adalah*

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -8\\
2 & -2 & 3 & -3 & -20\\
1 & 1 & 1 & 0 & -2\\
1 & -1 & 4 & 3 & 4
\end{array}\right)$$

1. *Pilih elemen pivot $a_{11} = 1$. Misalkan $P_j$ menyatakan baris ke-$j$ matriks augmented. Maka dengan melakukan operasi-operasi $P_2 = P_2 - 2P_1$, $P_3 = P_3 - P_1$, dan $P_4 = P_4 - P_1$, didapat matriks baru*

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 2 & -1 & -8\\
0 & 0 & -1 & -1 & -4\\
0 & 2 & -1 & 1 & 6\\
0 & 0 & 2 & 4 & 12
\end{array}\right)$$

tidak mempunyai penyelesaian atau mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian. Selanjutnya, apabila semua elemen tersebut sangat kecil, maka elemen pivot yang terpilih juga sangat kecil. Akibatnya, dari persamaan (2.5) terlihat bahwa nilai-nilai $x_i$ sangat sensitif terhadap perubahan kecil pada koefisien. Hal ini menunjukkan bahwa SPL yang bersangkutan dalam kondisi sakit.

Suatu strategi penentuan pivot yang sering digunakan di dalam metode Eliminasi Gauss dikenal sebagai penentuan pivot parsial. Di dalam metode ini, suatu elemen pivot $a_{kk}$ merupakan elemen maksimum pada kolom $k$ di bawah baris ke-$k$, untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, yakni

*Strategi penentuan pivot parsial*

$$\begin{aligned} \text{elemen pivot} &= \max\{|a_{kk}|,\ |a_{k+1,k}|,\ |a_{k+2,k}|,\ \ldots,\ |a_{nk}|\} \\ \text{untuk} \quad & k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kata parsial digunakan untuk membedakan prosedur ini dengan metode penentuan pivot total, yang menggunakan pertukaran baris dan kolom. Penentuan pivot total menghasilkan reduksi tambahan yang mempengaruhi galat-galat pembulatan dan hal ini sangat penting demi keakuratan penyelesaian sistem-sistem tertentu. Kita tidak akan membahas strategi penentuan pivot total di sini.

Apabila elemen pivot pada langkah ke-$k$ bernilai nol, maka terdapat tiga kemungkinan:

1. SPL mempunyai solusi **tunggal**.
   Dalam hal ini baris pivot ditukar dengan salah satu baris di bawahnya sedemikian hingga diperoleh elemen pivot yang tak nol.

2. SPL yang bersangkutan **tidak bebas**.
   Apabila elemen pivot nol tidak dapat dihindari dan SPL-nya bersifat konsisten, maka SPL tersebut mempunyai tak berhingga penyelesaian. Sebagai contoh, SPL di bawah ini bersifat tidak bebas.

   *Contoh SPL yang tak bebas*

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

   Perhatikan, persamaan pertama merupakan jumlah persamaan kedua dan ketiga, sehingga SPL tersebut tidak bebas. SPL tersebut dikatakan **bergantung secara linier**, karena salah satu persamaan merupakan kombinasi linier kedua persamaan yang lain.

langkah kedua, menghasilkan

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ -\tfrac{3}{2}y - \tfrac{7}{2}z &= 0 \\ 0z &= 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan ketiga diperoleh bahwa $z$ dapat bernilai berapa saja. Penyelesalain SPL di atas dapat ditulis sebagai $(x, y, z) = (1 + \frac{2}{3}c, -\frac{7}{3}c, c)$, untuk sebarang nilai $c$. Jadi SPL tersebut konsisten namun tidak bebas, mempunyai tak berhingga penyelesaian.

3. SPL yang bersangkutan **tidak konsisten**.
   Dengan mengganti ruas kanan persamaan pertama SPL di atas akan diperoleh SPL lain yang bersifat tidak konsisten. Misalnya, jika ruas kanan persamaan pertama diganti menjadi 1, diperoleh SPL

   *Contoh SPL yang tidak konsisten*

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + 4z &= 1. \end{aligned}$$

   Setelah langkah eliminasi kedua diperoleh

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ -\tfrac{3}{2}y - \tfrac{7}{2}z &= \tfrac{1}{2} \\ 0z &= 1. \end{aligned}$$

   Di sini jelas tidak ada nilai $z$ yang memenuhi persamaan ketiga, sehingga SPL tersebut bersifat tidak konsisten. (Jumlah persamaan kedua dan ketiga pada SPL semula adalah $2x + y + z = 2$, yang bertentangan dengan persamaan pertama.)

Suatu SPL yang bersifat bahwa tidak ada satu persamaanpun yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier persamaan-persamaan yang lain disebut **bebas linier**. Dari teorema dasar dalam aljabar linier diketahui bahwa setiap SPL bebas linier yang terdiri atas $n$ persamaan dalam $n$ variabel mempunyai penyelesaian tunggal. Akan tetapi di dalam komputasi numerik, karena digunakan pendekatan hampiran dengan menggunakan pehitungan-perhitungan aritmetika oleh komputer, pernyataan tersebut diartikaan secara kurang persis. Khususnya, jika pada suatu langkah eliminasi Gauss diperoleh elemen pivot yang tidak tepat bernilai nol, namun sangat kecil (mendekati nol) dibandingkan dengan koefisien-

*Secara teoritis, SPL yang bebas linier mempunyai solusi tunggal, namun secara numerik dapat diperoleh solusi hampiran yang tidak valid, jika terdapat elemen pivot yang nilainya mendekati nol.*

koefisien lain dalam baris pivot, pembagian oleh elemen pivot tersebut mengakibatkan penyelesaian numerik yang memuat galat pembulatan yang mungkin cukup berarti, sehingga penyelesaian yang diperoleh tidak valid.

Algoritma eliminasi Gauss (2.1) dapat secara mudah dimodifikasi untuk menerapkan strategi pencarian pivot parsial. Dalam hal ini kita ganti langkah 1(a) dengan mencari $p$ di antara $\{i,\ i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n\}$ sedemikian hingga

$$|a_{pi}| = \max\{|a_{ii}|,\ |a_{i+1,i}|,\ |a_{i+2,i}|,\ \ldots,\ |a_{n,i}|\}.$$

Strategi penentuan pivot parsial bertujuan untuk menghindari pemakaian elemen pivot yang bernilai hampir nol. Akan tetapi alasan lain yang sama penting adalah, dalam kebanyakan kasus penentuan pivot parsial menurunkan efek perambatan galat akibat pembulatan. Dengan stratedi penentuan pivot parsial, pengali-pengali $m_{ik}$ pada (2.2) dan (2.3) memenuhi

$$|m_{ik}| \leq 1, \qquad 1 \leq k < i \leq n.$$

Hal ini akan mengurangi timbulnya kasus galat akibat kehilangan angka signifikan, karena perkalian dengan $m_{ik}$ tidak akan menghasilkan bilangan yang lebih besar.

Apabila algoritma tersebut gagal dalam menggunakan suatu strategi penentuan pivot, maka kita tidak perlu mencari strategi lain karena permasalahannya pada matriks $A$, bukan pada strateginya. Khususnya, apabila matriks $A$ singular, maka proses akan berakhir dengan suatu elemen pivot dan semua elemen di bawahnya bernilai nol. Dalam hal ini metode gagal, dalam arti kita tidak dapat menemukan penyelesaian tunggal.

Apabila matriks koefisien $A$ "hampir singular", maka SPL tersebut secara numerik tidak stabil. Artinya, suatu perubahan kecil nilai elemen-elemen $A$ atau $\mathbf{B}$ akan menghasilkan suatu perubahan drastis pada vektor penyelesaian $\mathbf{X}$ pada SPL $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Apabila SPL $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$ secara numerik stabil, maka suatu perubahan kecil nilai elemen-elemen $A$ atau $\mathbf{B}$ akan menghasilkan suatu perubahan kecil pada vektor penyelesaian $\mathbf{X}$.

Dengan menggunakan program MATLAB kita dapat menyelesaikan sebuah SPL secara mudah. Sebagai contoh SPL pada contoh 2.5 dapat diselesaikan dengan MATLAB sebagai berikut.

```
>> A=[1 -1 2 -1;2 -2 3 -3;1 1 1 0;1 -1 4 3]
```

**Penyelesaian:**
*Matriks augmented dalam SPL ini adalah*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ -1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

1. *Elemen pivot* $a_{11} = 1$ *dapat digunakan untuk mengnolkan elemen-elemen di bawahnya melalui operasi-operasi* $P_2 = P_2 - P_1$, $P_3 = P_3 - 2P_1$, *dan* $P_4 = P_4 + P_1$:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

2. *Elemen pivot* $a_{22} = 0$, *sehingga perlu dicari elemen tak nol di bawahnya. Ternyata semua elemen di bawah* $a_{22}$ *bernilai nol, sehingga proses berakhir. SPL tidak mempunyai penyelesaian tunggal. Untuk mengetahui apakah SPL tersebut tidak mempunyai penyelesaian atau mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian, kita lakukan operasi* $P_4 = P_3 + P_4$ *dan kita dapatkan matriks augmented*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

*Dari matriks terakhir kita dapatkan*

$$\begin{aligned} x_4 &= 3 \\ x_3 &= -4 + 2x_4 = -4 + 2 \times 3 = 2 \\ x_1 &= 7 - x_2 - x_3 - x_4 = 7 - x_2 - 2 - 3 = 2 - x_2. \quad \square \end{aligned}$$

Dalam penyelesain ini nilai $x_1$ dinyatakan dalam $x_2$, sehingga apabila $x_2$ ditentukan maka $x_1$ dapat dihitung. Oleh karena $x_2$ dapat bernilai berapa saja, maka SPL di atas memiliki tak berhingga banyak penyelesaian.

*Dengan substitusi mundur kita dapatkan*

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 3 \\
x_3 &= -4 + 2x_4 = -4 + 2 \times 3 = 2 && \textit{dari baris ketiga} \\
x_3 &= (-2 - x_4)/(-1) = -(-2-3) = 5 && \textit{dari baris kedua}
\end{aligned}
$$

*Ternyata nilai $x_3$ tidak tunggal. Ini artinya SPL di atas tidak mempunyai penyelesaian. Dengan kata lain SPL di atas tidak konsisten.* □

### 2.2.1 Analisis Algoritma Eliminasi Gauss

Untuk mengetahui banyaknya operasi hitung yang diperlukan oleh Algoritma (2.1) untuk menyelesaikan SPL $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$ dengan $n$ variabel kita lihat langkah-langkah pada algoritma tersebut. Tabel 2.1 menyajikan hasil analisis ini.

Tabel 2.1: Analisis Algoritma Eliminasi Gauss

| Langkah (perhitungan) | Cacah Penjumlahan/ Pengurangan | Cacah Perkalian/ Pembagian |
|---|---|---|
| 1(d)i. $m_{ji} = a_{ji}/a_{ii}$ | 0 | $(n-i)$ |
| 1(d)ii. $a_{jk} = a_{jk} - m_{ji}a_{ik}$ | $(n-i)(n-i)$ | $(n-i)(n-i)$ |
| 1(d)iii. $b_j = b_j - m_{ji}b_i$ | $(n-i)$ | $(n-i)$ |
| 3. $x_n = b_n/a_{nn}$ | 0 | 1 |
| 4. $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$ | $(n-i)$ | $(n-i)$ |
| Jumlah | $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 + 2(n-i)$ $= \frac{(n-1)n(2n+5)}{6}$ | $1 + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^2 + 3(n-i)$ $= \frac{(n-1)n(n+4)+3}{3}$ |

#### Sistem tridiagonal

Metode eliminasi Gauss merupakan metode yang sederhana untuk digunakan khususnya jika semua koefisien tak nol terkumpul pada diagonal utama dan beberapa diagonal di sekitarnya. Suatu sistem yang bersifat demikian disebut *banded* dan banyaknya diagonal yang memuat koefisien-koefisien tak nol disebut *bandwidth*. Sebuah contoh khusus, namun sering dijumpai, adalah sistem tridiagonal

*Bandwidth suatu SPL, sistem tridiagonal*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

yang mempunyai *bandwidth* tiga. Sistem-sistem demikian muncul, misalnya, pada penyelesaian numerik untuk menyusun spline kubik dan pada penyelesaian masalah syarat batas. Proses eliminasi untuk sistem demikian bersifat trivial karena hanya dengan membentuk sebuah subdiagonal nol tambahan, proses penyulihan mundur segera dapat dilakukan. Dengan $(n-1)$ operasi baris yang dilakukan berurutan:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j} \times \frac{a_{i,i-1}}{a_{i-1,i-1}}; \quad b_i = b_i - b_{i-1} \times \frac{a_{i,i-1}}{a_{i-1,i-1}}; \tag{2.8}$$
$$\text{untuk } i = 2,\ 3,\ \dots,\ n; \quad j = i-1,\ ;$$

diperoleh sistem dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

yang memiliki penyelesaian

*Penyelesaian SPL tridiagonal*

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}; \quad x_i = \frac{b_i - a_{i,i+1} \times x_{i+1}}{a_{ii}}; \quad i = n-1,\ n-2,\ \dots,\ 1. \tag{2.10}$$

Keseluruhan prosedur (2.8) dan (2.10) untuk menyelesaikan SPL

5. *Dengan menggunakan operasi-operasi* $P_1 = P_1 - (3/2) * P_3$, $P_2 = P_2 + (1/2) * P_3$, *dan* $P_4 = P_4 - 2P_3$ *matriks augmentednya menjadi*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

6. *Sekarang kita bagi baris keempat dengan 2 dengan operasi* $P_4 = P_4/2$ *dan kemudian lakukan operasi-operasi* $P_1 = P_1 + 2P_4$, $P_2 = P_2 - P_4$, *dan* $P_3 = P_3 - P_4$ *untuk memperoleh*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

7. *Sekarang kita telah memperoleh matriks diagonal satuan, sehingga penyelesaian SPL di atas dapat dibaca pada kolom terakhir, yakni* $\mathbf{X} = (-7\ 3\ 2\ 2)^T$. □

**Catatan:**
Metode ini memerlukan lebih banyak operasi daripada eliminasi Gauss, selama proses reduksi matriks. Akan tetapi setelah itu kita tidak lagi memerlukan operasi hitung untuk mendapatkan penyelesaian SPL. Dengan demikian metode eliminasi Gauss–Jordan kurang efisien untuk menyelesaian sebuah SPL, tetapi lebih efisien daripada eliminasi Gauss jika kita ingin menyelesaikan sejumlah SPL dengan matriks koefisien sama.

### 2.2.3 Penyelesaian $n$ Persamaan dalam $m$ Variabel

Pada pembahasan-pembahasan sebelumnya kita membatasi SPL yang terdiri atas $n$ persamaan dalam $n$ variabel. Sekarang kita akan memperumum penyelesaian SPL yang terdiri atas $n$ persamaan dalam $m$ variabel. Misalkan kita gunakan metode eliminasi Gauss–Jordan. Prosesnya tidak berbeda dengan yang sudah dijelaskan di atas.

Langkah terakhir pada metode Gauss-Jordan akan memberikan solusi tunggal, jika ada, atau dapat digunakan untuk menjelaskan keberdigunakan fungsi `rref(A)`. Penyelesaian SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi `rref` pada MATLAB, yakni dengan menggunakan perintah `rref([A b])`. Jika `rank(A)=rank([A b])=n`, maka kolom terakhir merupakan vektor penyelesaian SPL tersebut.

## LATIHAN 2.2

1. Tulis algoritma eliminasi Gauss–Jordan dengan melengkapi Algoritma (2.1).
2. Tulis program MATLAB `tridiagonal.m` untuk menyelesaikan SPL tridiagonal berukuran $n \times n$.
3. Lakukan analisis algoritma eliminasi Gauss–Jordan dengan mengubah/melengkapi Tabel (2.1). Bandingkan keduanya!
4. Selesaikan SPL-SPL di bawah ini dengan menggunakan metode eliminasi Gauss (i) tanpa pivoting (ii) dengan pivoting parsial.

   (a) $$\begin{aligned} 0.005x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -3x_1 - x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 20 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} 1.19x_1 + 2.37x_2 - 7.31x_3 + 1.75x_4 &= 2.78 \\ 2.15x_1 - 9.76x_2 + 1.54x_3 - 2.08x_4 &= 6.27 \\ 10.7x_1 - 1.11x_2 + 3.78x_3 + 4.49x_4 &= 9.03 \\ 2.17x_1 + 3.58x_2 + 1.70x_3 + 9.33x_4 &= 5.00 \end{aligned}$$

   Gunakan tiga angka signifikan dan berikan komentar mengenai hasilnya!
5. Selesaikan SPL

   $$\begin{aligned} 1.34x_1 + 7.21x_2 + 1.04x_3 &= 9.60 \\ 3.18x_1 + 4.01x_2 + 0.980x_3 &= 8.17 \\ 2.84x_1 - 24.0x_2 - 2.24x_3 &= -23.4 \end{aligned}$$

   dengan menggunakan metode eliminasi Gauss dengan pivoting parsial. Gunakan tiga angka signifikan. Ubah ruas kanan persamaan

9. Selesaikan SPL tridiagonal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan

$$a_{ii} = 4, \quad a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = 1, \quad i = 1, 2, ..., 100, \quad b = (1, 1, ..., 1)^T.$$

   Gunakan MATLAB untuk menghasilkan matriks $A$ dan vektor $b$. Selesaikan SPL tersebut dengan program `tridiagonal`.

10. Tunjukkan bahwa banyaknya perkalian dan pembagian yang diperlukan untuk menyelesaikan SPL tridiagonal $n \times n$ adalah $5n - 4$.

## 2.3 Dekomposisi (Faktorisasi) LU

Suatu masalah yang sering dihadapi di dalam menyelesaikan SPL $A\mathbf{X}$=$\mathbf{B}$ adalah perlunya mendapatkan beberapa penyelesaian untuk berbagai vektor **B**, sedangkan matriks $A$ tetap. Penggunaan metode eliminasi Gauss mengharuskan penyelesaian setiap SPL $A\mathbf{X}$=$\mathbf{B}$ secara terpisah untuk setiap vektor **B**, dengan menggunakan operasi aritmetika yang pada prinsipnya sama sampai dilakukan proses penyulihan balik. Suatu proses yang dikenal sebagai faktorisasi LU menangani permasalahan ini dengan hanya berkonsentrasi pada matriks koefisien, $A$.

Jika matriks bujur sangkar $A$ dapat difaktorkan menjadi $A = LU$, dengan $L$ adalah suatu matriks segitiga bawah dan $U$ matriks segitiga atas, maka kita menyebut hal ini sebagai faktorisasi $LU$ dari $A$. Sebagai contoh sekaligus penjelasan, misalkan $A$ matriks berukuran $4 \times 4$,

*Faktorisai LU matriks $A$ menyatakan matriks $A$ sebagai hasil kali matriks segitiga bawah $L$ dan matriks segitiga atas $U$.*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Penyelesaian SPL $A\mathbf{X}$=$\mathbf{B}$ kemudian dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$A\mathbf{X} = LU\mathbf{X} = L\mathbf{Y} = \mathbf{B},$$

dengan $\mathbf{Y}$=$U\mathbf{X}$. Jadi permasalahnnya sekarang dapat diselesaikan melalui dua tahap, yakni (1) mencari vektor **Y** yang memenuhi $L\mathbf{Y}$=$\mathbf{B}$, dan (2) mencari vektor **X** yang memenuhi $\mathbf{Y}$=$U\mathbf{X}$.

Oleh karena $L$ adalah matriks segitiga bawah, penyelesaian $L\mathbf{Y}$=$\mathbf{B}$

**CONTOH 2.9.**
*Perhatikan SPL*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

*Matriks koefisien dari SPL ini adalah*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*Elemen pivotnya adalah* $a_{11} = 2$; *pengali-pengalinya adalah* $m_{21} = 1/2$ *dan* $m_{31} = 4/2 = 2$. *Setelah membuat nol elemen-elemen di bawah pivot, matriks koefisien menjadi*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Misalkan matriks* $M_1$ *dibentuk dengan menggunakan pengali-pengali* $m_{21}$ *dan* $m_{31}$. *Elemen-elemen pada diagonal utama bernilai 1, kolom pertama di bawah diagonal utama merupakan negatif dari pengali-pengali tersebut, sedangkan semua elemen lainnya bernilai nol. Maka* $M_1$ *adalah*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Perhatikan hasil kali* $M_1$ *dan* $A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Ternyata diperoleh*

$$M_1 A = A_1 \tag{2.14}$$

*Apabila kita lanjutkan proses eliminasi untuk membuat nol elemen-elemen pada kolom kedua di bawah diagonal utama dengan menggunakan pengali* $m_{32} = -7/-3 = 7/3$, *maka kita peroleh matriks yang tereduksi,*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

*Sekarang misalkan matriks $M_2$ adalah suatu matriks dengan diagonal utama satuan, kolom kedua di bawah diagonal utama merupakan negatif dari pengali di atas, dan elemen-elemen lainnya bernilai nol, yakni*

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Perhatikan hasilkali $M_2$ dan $A_1$:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

*Ternyata diperoleh hubungan*

$$M_2 A_1 = A_2. \tag{2.15}$$

*Dari* (2.14) *dan* (2.15) *diperoleh*

$$M_2 M_1 A = A_2. \tag{2.16}$$

*Misalkan $M_1^{-1}$ adalah invers matriks $M_1$ dan $M_2^{-1}$ adalah invers matriks $M_2$. Maka*

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Dari* (2.16) *kita dapatkan*

$$\begin{aligned} A = I \times I \times A &= (M_1^{-1}(M_2^{-1}M_2)M_1)A \\ &= M_1^{-1}M_2^{-1}(M_2M_1A) = M_1^{-1}M_2^{-1}A_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

*Akan tetapi, oleh karena $M_1^{-1}$ dan $M_2^{-1}$ adalah matriks-matriks segitiga bawah, maka demikian juga $M_1^{-1}M_2^{-1}$. Juga kita tahu $A_2$ merupakan matriks segitiga atas. Jika kita tuliskan $L = M_1^{-1}M_2^{-1}$ dan $U = A_2$, maka dari* (2.17)

```
   4.    1.   - 2.
   0.    3.5  - 1.
   0.    0.     5.1428571
 L  =
   1.      0.          0.
   0.5     1.          0.
   0.25  - 0.3571429    1.
>>L*U
 ans  =
   4.    1.    2.
   2.    4.  - 2.
   1.  - 1.    5.
 >>E*A
 ans  =
   4.    1.    2.
   2.    4.  - 2.
   1.  - 1.    5.
```

*Faktorisasi LU tidak bersifat tunggal.*

Ternyata hasil faktorisasi LU yang diberikan oleh MATLAB berbeda dengan hasil faktorisasi kita di atas. Hal ini tidaklah mengherankan, karena faktorisasi LU tergantung pada operasi-operasi baris yang digunakan di dalam proses eliminasi. Dengan kata lain, faktorisasi LU tidak bersifat tunggal. Pada hasil keluaran MATLAB di atas $E$ merupakan matriks permutasi yang menunjukkan proses eliminasi, dan hubungannya dengan matriks $A$, $L$, dan $U$ adalah $E \times A = L \times U$.

### 2.3.1 Beberapa Metode Faktorisasi Lain

Misalkan kita ingin memfaktorkan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, $U$ berbentuk

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nilai-nilai $u_{ij}$ dan $l_{ij}$ dapat dihitung dengan cara mirip rumus (2.18) dan (2.19). Akan tetapi menarik untuk diperhatikan bahwa, jika $D$ menunjukkan matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonal utamanya $u^*_{kk}$ dan $L^*$ dan $U^*$ adalah hasil faktorisasi LU dengan metode Doolitle, maka

*Faktorisasi* **Crout** *menghasilkan $A = LU$, dengan $L = L^*D$ dan $U = D^{-1}U^*$, $A = L^*U^*$ adalah hasil faktorisasi* **Doolitle***, dan $D$ matriks diagonal dari $U^*$.*

$$A = L^*U^* = L^*(DD^{-1})U^* = (L^*D)(D^{-1}U^*) = LU.$$

Jadi faktorisasi Crout dan Doolitle saling terkait erat.

**Metode Choleski.** Jika $A$ matriks nyata, simetris, dan definit positif, maka kita dapat menemukan suatu matriks segitiga bawah $L$ sedemikian hingga $A = LL^T$. Cara ini dikenal sebagai faktorisasi Choleski. Matriks $L$ dihitung dengan menyelesaikan persamaan-persamaan

*Faktorisasi* **Choleski** *menghasilkan $A = LL^T$ untuk matriks A bersifat simetris dan definit positif.*

$$\sum_{j=1}^{r-1} l_{rj}^2 + l_{rr}^2 = a_{rr}, \quad \sum_{j=1}^{i-1} l_{rj}l_{ij} + l_{ri}l_{ii} = a_{ri}, \tag{2.20}$$

untuk $r = 1, 2, \ldots, n$ dan untuk setiap $r, i = 1, 2, \ldots, r-1$.

**CONTOH 2.10.**
*Dengan menggunakan metode Doolitle matriks $A$ di atas dapat difaktorkan menjadi*

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

*Dengan mengalikan kedua matriks pada ruas kanan diperoleh matriks*

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} & l_{21}u_{14} + u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44} \end{pmatrix}$$

*Dengan menyamakan matriks tersebut dan matriks $A$ diperoleh*

$\boxed{u_{11} = 6}$, $\boxed{u_{12} = 2}$, $\boxed{u_{13} = 1}$, $\boxed{u_{14} = -1}$,

$6l_{21} = 2,\quad 6l_{31} = 1,\quad 6l_{41} = -1,$ *atau*

$\boxed{l_{21} = 1/3}$, $\boxed{l_{31} = 1/6}$, $\boxed{l_{41} = -1/6}$,

$(\frac{1}{3})2 + u_{22} = 4,\quad (\frac{1}{3})1 + u_{23} = 1,\quad -\frac{1}{3} + u_{24} = 0,$ *atau*

$\boxed{u_{22} = 3\frac{1}{3}}$ $\boxed{u_{23} = 2/3}$ $\boxed{u_{24} = 1/3}$,

$(\frac{1}{6})2 + \frac{10}{3}l_{32} = 1,\qquad (-\frac{1}{6})2 + \frac{10}{3}l_{42} = 0,$ *atau*

$\boxed{l_{32} = 1/5}$ $\boxed{l_{42} = 1/10}$

$(\frac{1}{6})1 + (\frac{1}{5})\frac{2}{3} + u_{33} = 4,\quad \frac{1}{6}(-1) + (\frac{1}{5})(\frac{1}{3}) + u_{34} = -1,$ *atau*

$\boxed{u_{33} = 3\frac{7}{10}}$ $\boxed{u_{34} = -9/10}$,

$(-\frac{1}{6})1 + (\frac{1}{10})(\frac{2}{3}) + \frac{37}{10}l_{43} = -1,$ *atau* $\boxed{l_{43} = -9/37}$, *dan*

$\frac{1}{6} + (\frac{1}{10})(\frac{1}{3}) + (-\frac{9}{37})(-\frac{9}{10}) + u_{44} = 3,$ *atau* $\boxed{u_{44} = 191/74}$.

Jadi, matriks $L$ dan $U$ tersebut adalah

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 191/74 \end{pmatrix}. \quad \square$$

**CONTOH 2.11.**
*Carilah dekomposisi Choleski dari matriks $A$ sebagai berikut*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

melalui substitusi mundur.

Metode ini bermanfaat khususnya apabila kita mempunyai sejumlah SPL dengan matriks koefisien sama.

**CONTOH 2.12.**
*Selesaikan SPL*

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 13 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= 11 \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 &= 8 \end{aligned}$$

**Penyelesaian:**
*SPL tersebut dapat ditulis sebagai* $A\mathbf{X} = \mathbf{b}$ *dengan* $A$ *adalah matriks koefisien*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Dalam contoh sebelumnya kita sudah menghitung faktorisasi LU dari* $A$, *yakni*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 37/10 & -9/10 \\ 0 & 0 & 0 & 191/74 \end{pmatrix}.$$

*SPL* $L\mathbf{Z} = \mathbf{b}$ *diberikan oleh*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & -9/37 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix},$$

*sehingga* $z_1 = 9$,

$$\begin{array}{lcccl} \frac{1}{3}z_1 + z_2 = 13 & \Longrightarrow & z_2 & = & 10, \\ \frac{1}{6}z_1 + \frac{1}{5}z_2 + z_3 = 11 & \Longrightarrow & z_3 & = & 11 - \frac{3}{2} - 2 = \frac{15}{2}, \end{array}$$

```
      0            0           37/10         -9/10
      0            0             0          191/74
E =
      1            0             0             0
      0            1             0             0
      0            0             1             0
      0            0             0             1
>> b=[9;13;11;8]
b =
      9
     13
     11
      8
>> Z=L\b % Penyelesian LZ=b
Z =
      9
     10
    15/2
   382/37
>> X=U\Z % Penyelesaian UX=Z
X =
      1
      2
      3
      4
>> X=A\b % Bandingkan dengan penyelesaian langsung
X =
      1
      2
      3
      4
```

## LATIHAN 2.3

1. Carilah faktorisasi LU matriks-matriks $A$ di bawah ini, kemudian selesaikan SPL $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

$(-2,\ -10,\ 11,\ 4)^T$, dengan $A = LU$ adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## 2.4 Galat dalam Penyelesaian SPL

Reliabilitas penyelesaian suatu SPL yang diperoleh dengan suatu metode numerik merupakan hal yang sangat penting dan perlu mendapat perhatian. Kecuali terjadi kasus bahwa semua perhitungan melibatkan bilangan bulat atau rasional, eliminasi Gauss menyangkut galat pembulatan atau pemotongan di dalam operasi aritmetika, yang mengakibatkan galat dalam hampiran penyelesaian yang diperoleh. Apabila perhitungan dilakukan dengan MATLAB, mungkin Anda menemukan bahwa hasil perhitungan mungkin "hampir" sama dengan penyelesaian eksak. Hal ini dikarenakan MATLAB menggunakan tingkat keakuratan dengan presisi ganda (sampai 15 atau 16 angka signifikan) dalam operasi-operasi aritmetika. MATLAB menggunakan besaran `eps` untuk menyatakan galat setiap bilangan yang dapat disajikan olehnya. Artinya, `eps` adalah harga mutlak penyelesaian terkecil dari relasi $1 + \epsilon \neq 1$. Jadi, untuk setiap hasil perhitungan $\overline{x}$, galat relatifnya, $|e_{\overline{x}}/x|$, tidak akan pernah kurang daripada `eps`. Jelas bahwa proses penyelesaian suatu SPL akan menghasilkan akumulasi dari galat-galat minimum tersebut. Pembagian dengan suatu bilangan yang sangat kecil, atau pengurangan dua buah bilangan yang hampir sama dapat menghasilkan efek penurunan tingkat keakuratan hasil secara dramatis. Konsep **norm** dan **bilangan kondisi** suatu matriks, yang akan dijelaskan di bawah ini, merupakan alat yang berguna untuk mengestimasi akumulasi galat yang terjadi dalam penyelesaian SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

*MATLAB menggunakan besaran `eps` untuk menyatakan galat setiap bilangan yang dapat disajikan olehnya. Artinya, `eps` adalah harga mutlak penyelesaian terkecil dari relasi $1 + \epsilon \neq 1$.*

Kita mulai dengan memisalkan $\hat{x}$ adalah hampiran penyelesaian (hasil perhitngan) SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $x$ adalah penyelesaian eksaknya. Galat hampiran $\hat{x}$ adalah

$$e_{\hat{x}} = x - \hat{x}.$$

Selanjutnya, definisikan

$$r = b - A\hat{x}.$$

Besaran ini disebut **residu** di dalam penghampiran $b$ oleh $A\hat{x}$. Jelaslah apabila $\hat{x} = x$, maka $r = 0$. Oleh karena $Ae_{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) = Ax - A\hat{x} = b - A\hat{x} = r$, maka diperoleh hubungan

$$Ae_{\hat{x}} = r.$$

Jadi, galat $e_{\hat{x}}$ memenuhi suatu SPL dengan matriks koefisien $A$, dan vektor residu, $r$, sebagai vektor konstanta.

Dalam praktek, nilai galat $e_{\hat{x}}$ mungkin tidak diketahui, karena kita tidak tahu $x$, namun nilai residu $r$, sebagai hampiran nilai $b$, adalah diketahui (dihitung dari definisinya). Oleh karena itu diperlukan adanya relasi antara galat $e_{\hat{x}}$ dan residu $r$. Untuk ini diperkenalkan pengertian ukuran besar (panjang) vektor dan matriks.

Ukuran besar (panjang) suatu vektor $\mathbf{x}_{n\times 1}$, ditulis dengan notasi $|\mathbf{x}|$, dan matriks $A_{n\times n}$, ditulis dengan $||A||$ didefinisikan[3] sebagai

*Pengertian norm suatu vektor dan matriks*

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| &= \max_{1\le i\le n} |x_i|, \\ ||A|| &= \max_{1\le i\le n} \textstyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \end{aligned} \tag{2.21}$$

**TEOREMA 2.2.**

*Misalkan $A$ matriks nonsingular. Maka penyelesaian-penyelesaian $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ memenuhi*

$$\frac{||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}||}{|\mathbf{x}|} \le ||A||.||A^{-1}||\frac{||\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}||}{|\mathbf{b}|}. \tag{2.22}$$

BUKTI: Dengan mengurangkan kedua SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ diperoleh

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} &= A^{-1}(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat norm, dipenuhi hubungan

$$|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}| \le ||A^{-1}(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})|| \le ||A^{-1}||.|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}|.$$

[3] Terdapat beberapa definisi norm lain, namun definisi tersebut cukup untuk keperluan pembahasan hal di atas.

*Untuk* $n = 4$ *misalnya, matriks Hilbert dan inversnya berturut-turut adalah*

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad H_4^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{pmatrix}$$

*Dengan meggunakan rumus norm* (2.21) *dan rumus bilangan kondisi* (2.23), *didapatkan*

$$K = ||H_4| \times ||H_4^{-1}|| = \frac{25}{12} \times 13620 = 2800,$$

*yang cukup besar.*

*Untuk melihat bahwa matriks Hilbert memang sangat sensitif terhadap perubahan kecil pada elemen-elemennya, kita ambil hampiran* $H_4$ *sampai lima angka signifikan, yakni*

$$\hat{H}_4 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.50000 & 0.33333 & 0.25000 \\ 0.50000 & 0.33333 & 0.25000 & 0.20000 \\ 0.33333 & 0.25000 & 0.20000 & 0.16667 \\ 0.25000 & 0.20000 & 0.16667 & 0.14286 \end{pmatrix}.$$

*Invers matriks hampiran* $H_4$ *tersebut adalah*

$$\hat{H}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 16.2479 & -122.722 & 246.488 & -144.195 \\ -122.722 & 1229.9 & -2771.31 & 1726.12 \\ 246.488 & -2771.31 & 6650.06 & -4310.0 \\ -144.195 & 1726.12 & -4310.0 & 2871.15 \end{pmatrix}.$$

*Terlihat bahwa galat pada* $\hat{H}_4$ *terjadi pada tempat desimal keenam, sedangkan beberapa galat pada* $\hat{H}_4^{-1}$ *terjadi pada tempat desimal kedua. Berarti telah terjadi perubahan angka signifikan yang cukup berarti pada* $\hat{H}_4^{-1}$ *dibandingkan pada* $\hat{H}_4$.

*MATLAB memiliki fungsi* `cond` *yang dapat digunakan untuk menghitung bilangan kondisi suatu matriks. MATLAB juga menyediakan fungsi* `hilb` *untuk menghasilkan matriks Hilbert, dan fungsi* `invhilb` *untuk menghitung invers matriks Hilbert. Cobalah Anda gunakan MATLAB untuk mengkonfirmasikan penjelasan di atas dan untuk menyelesaikan SPL* $H_4\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *dengan* $\mathbf{b} = [1,\ 1,\ 1,\ 1]^T$. *Dari perhitungan* $H_4^{-1}$ *di atas terlihat bahwa penyelesaian eksak SPL tersebut adalah*

3. (a) Selesaikan SPL $\{5x + 7y = 0.7,\ 7x + 10y = 1\}$ dan SPL pertubasinya $\{5x + 7y = 0.69,\ 7x + 10y = 1.01\}$.
   (b) Hitung bilangan kondisi matriks koefisien SPL tersebut.
   (c) Gambarkan kurva kedua persaamaan linier pada SPL pertama. Jelaskan efek perubahan ruas kanan secara geometris. Jelaskan sifat kondisi sakit moderat SPL tersebut secara geometris.

4. Hitunglah bilangan kondisi matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}, \qquad c \neq 1.$$

   Kapan matriks $A$ menjadi berkondisi sakit? Jelaskan dalam hubungannya dengan penyelesaian SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$! Bagaimanakah hubungan bilangan kondisi matriks $A$ dan determinannya?

5. Tunjukkan bahwa bilangan kondisi suatu matriks selalu lebih besar atau sama dengan 1!

6. Tulislah fungsi MATLAB `kond` untuk menghitung bilangan kondisi suatu matriks $A$ berdasarkan rumus norm (2.21) dan rumus bilangan kondisi (2.23). Gunakan fungsi `kond` untuk menghitung bilangan kondisi matriks-matriks koefisien dalam latihan ini. Bandingkan hasilnya jika Anda menggunakan fungsi `cond` yang sudah tersedia di sistem MATLAB.

7. (a) Gunakan MATLAB untuk menghasilkan matriks

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   untuk $n = 3,\ 5,\ 10$.
   (b) Hitunglah $A_n^{-1}$ secara eksplisit, dan hitunglah dengan MATLAB untuk $n = 3,\ 5,\ 10$.
   (c) Hitunglah bilangan kondisi matriks $A_n$.
   (d) Tentukan penyelesaian SPL $A_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $\mathbf{b} = (-n+2,\ -n+3,\ \ldots,\ -1,\ 0)^T$ dan $\mathbf{b} = (-n+2,\ -n+3,\ \ldots,\ -1,\ \epsilon)^T$.

piran pertama terhadap penyelesaian SPL tersebut adalah

$$x_1 = 3/5 = 0.6$$
$$x_2 = 25/11 = 2.2727$$
$$x_3 = -11/10 = -1.1$$
$$x_4 = 15/8 = 1.8750$$

Sekarang dengan menggunakan nilai-nilai ini pada ruas kanan persamaan (P5) – (P8), kita dapat menghitung hampiran kedua. Proses ini dapat diulang-ulang sampai keakuratan hampiran yang diinginkan tercapai. Berikut adalah hasil proses iterasi dengan menggunakan komputer

Tabel 2.2: Hasil iterasi P5, P6, P7, P8

| $n$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.6 | 2.27273 | −1.1 | 1.875 |
| 2 | 1.04727 | 1.71591 | −0.805227 | 0.885227 |
| 3 | 0.932636 | 2.05331 | −1.04934 | 1.13088 |
| 4 | 1.0152 | 1.9537 | −0.968109 | 0.973843 |
| 5 | 0.988991 | 2.01141 | −1.01029 | 1.02135 |
| 6 | 1.0032 | 1.99224 | −0.994522 | 0.994434 |
| 7 | 0.998128 | 2.00231 | −1.00197 | 1.00359 |
| 8 | 1.00063 | 1.99867 | −0.999036 | 0.998888 |

Setelah iterasi ke-8 diperoleh hampiran penyelesaian

$$x = (1.00063,\ 1.99867,\ -0.999036,\ 0.998888)^T.$$

Bandingkan dengan penyelesaian eksaknya, yakni $x = (1,\ 2,\ -1,\ 1)^T$.

**CONTOH 2.14.**
*Selesaikan SPL berikut ini dengan menggunakan metode Iterasi Jacobi.*

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 10x_3 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= -11 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \end{aligned}$$

*menjadi persamaan ketiga dan keempat, metode Jacobi ternyata berhasil memberikan penyelesaian tersebut, sebagaimana terlihat pada hasil keluaran MATLAB berikut ini.*

```
>> A=[10 -1 2 0;-1 11 -1 3;2 -1 10 0;0 3 -1 8]
A =
    10    -1     2     0
    -1    11    -1     3
     2    -1    10     0
     0     3    -1     8
>> b=[6;25;-11;-11]
b =
     6
    25
   -11
   -11
>> X0=[-2;1;3;-1];
>> [X,g,H]=jacobi(A,b,X0,T,N)
X =
    1.1039
    2.9965
   -1.0211
   -2.6263
g =
  1.0e-004 *
    0.0795
    0.2004
    0.0797
    0.1511
H =
   -2.0000    1.0000    3.0000   -1.0000
    0.1000    2.6364   -0.6000   -1.3750
    0.9836    2.6023   -0.8564   -2.4386
    1.0315    2.9494   -1.0365   -2.4579
    1.1022    2.9426   -1.0114   -2.6106
    1.0965    2.9930   -1.0262   -2.6049
    1.1045    2.9895   -1.0200   -2.6256
    1.1030    2.9965   -1.0220   -2.6236
    1.1040    2.9956   -1.0209   -2.6264
```

```
1.1037    2.9966   -1.0212   -2.6260
1.1039    2.9964   -1.0211   -2.6264
1.1039    2.9965   -1.0211   -2.6263
1.1039    2.9965   -1.0211   -2.6263
1.1039    2.9965   -1.0211   -2.6263
```

*Iterasi Jacobi konvergen (dengan menggunakan batas toleransi 0.0001) setelah iterasi ke-13. Penyelesaian yang diberikan persis sama dengan yang dihasilkan dengan metode langsung. Hampiran penyelesaian SPL kita adalah* $\mathbf{X} = (1.1039\ 2.9965\ -1.0211\ -2.6263)^T$. □

**Catatan:**
Dari contoh di atas kita dapat mengambil kesimpulan bahwa urutan persamaan di dalam suatu SPL sangat berpengaruh terhadap penampilan metode iterasi Jacobi. Kalau kita amati lebih lanjut contoh di atas, kekonvergenan iterasi Jacobi pada strategi kedua dikarenakan kita telah mengubah susunan SPL sedemikian hingga elemen-elemen $a_{ii}$ merupakan elemen-elemen terbesar pada setiap baris. Dengan kata lain, apabila matriks koefisien $A$ merupakan matriks dominan secara diagonal, maka metode iterasi Jacobi akan konvergen. Suatu matriks $A$ berukuran $n \times n$ dikatakan **dominan secara diagonal** apabila

*Syarat metode* iterasi Jacobi *konvergen adalah bahwa matriks koefisien A bersifat* **dominan secara diagonal**.

$$|a_{ii}| > |a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \ldots + |a_{i,n}| \quad \text{untuk} \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

## LATIHAN 2.5

1. Tentukan di antara SPL-SPL di bawah ini mana yang apabila diselesaikan dengan metode iterasi Jacobi konvergen. Selesaikan SPL-SPL tersebut dengan menggunakan program MAATLAB `jacobi` dengan menggunakan hampiran awal vektor nol, batas toleransi 0.00001, dan maksimum iterasi 10. Hitunglah galat pada setiap hampiran penyelesaian yang Anda dapatkan dengan membandingkan dengan penyelesaian eksaknya.

(a)
$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

*Tabel 2.3: Hasil iterasi untuk $x_1$, $x_2$, $x_3$, dan $x_4$*

| $n$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_2$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.6 | 2.32727 | −0.987273 | 0.878864 |
| 2 | 1.03018 | 2.03694 | −1.01446 | 0.984341 |
| 3 | 1.00659 | 2.00356 | −1.00253 | 0.998351 |
| 4 | 1.00086 | 2.0003 | −1.00031 | 0.99985 |

dengan $L$ dan $U$ berturut-turut adalah matriks segitiga bawah dan atas dengan diagonal nol dan $D$ matriks diagonal. Maka persamaan 2.26 dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}^{(k)} = D^{-1}(\mathbf{b} - L\mathbf{X}^{(k)} - U\mathbf{X}^{(k-1)}) \\ \Longrightarrow\ & (D+L)\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{b} - U\mathbf{X}^{(k-1)} \\ \Longrightarrow\ & \mathbf{X}^{(k)} = (D+L)^{-1})(\mathbf{b} - U\mathbf{X}^{(k-1)}), \end{aligned}$$

yang menghasilkan

*Rumus iterasi matriks* **Gauss–Seidel**

$$\mathbf{X}^{(k)} = -(D+L)^{-1}U\mathbf{X}^{(k-1)} + (D+L)^{-1}\mathbf{b}. \tag{2.27}$$

Suatu iterasi matriks

*Pengertian iterasi matriks* stasioner. *Iterasi Gauss–Seidel bersifat stasioner.*

$$\mathbf{X}^{(k)} = M_k\mathbf{X}^{(k-1)} + C_k\mathbf{b} \tag{2.28}$$

dikatakan **stasioner** jika $M_k$ dan $C_k$ tidak tergantung pada $k$, sehingga iterasinya dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{X}^{(k)} = M\mathbf{X}^{(k-1)} + C\mathbf{b}. \tag{2.29}$$

Jelas bahwa metode iterasi Gauss–Seidel bersifat stasioner dengan $M = -(D+L)^{-1}U$ dan $C = (D+L)^{-1}$.

## Kekonvergenan Iterasi Matriks

Penyelesaian SPL $A\mathbf{X} = b$ merupakan **titik tetap** iterasi matriks (2.28). Ini artinya, $\mathbf{X} = A^{-1}b$ dapat digunakan untuk mengganti masukan maupun keluaran pada persamaan iterasi (2.28), yakni

$$\mathbf{X} = A^{-1}b = M_k A^{-1}b + C_k b = M_k\mathbf{X} + C_k\mathbf{b}.$$

Dari kesamaan ini didapatkan

$$M_k\mathbf{X} = \mathbf{X} - C_k\mathbf{b}. \tag{2.30}$$

Sekarang, misalkan $e^{(k)}$ adalah galat hampiran ke-$k$,

$$e^{(k)} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k)} \tag{2.31}$$

Dengan menggunakan (2.28) dan (2.30) diperoleh

$$\begin{aligned}
e^{(k)} &= \mathbf{X} - (M_k\mathbf{X}^{(k-1)} + C_k\mathbf{b}) \\
&= M_k\mathbf{X} - M_k\mathbf{X}^{(k-1)} \\
&= M_k(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{(k-1)}) \\
&= M_k e^{(k-1)}. \\
&\vdots \\
&= M_k M_{k-1}\ldots M_1 e^{(0)},
\end{aligned}$$

dengan $e^{(0)}$ adalah galat hampiran awal. Untuk iterasi matriks stasioner (termasuk iterasi Gauss–Seidel) matriks galat hampiran ke-$k$ adalah

$$e^{(k)} = M^k e^{(0)}. \tag{2.32}$$

Dengan menggunakan sifat norm kita dapatkan

$$|e^{(k)}| \le ||M^k|.|e^{(0)}|. \tag{2.33}$$

Iterasi matriks (2.28) dikatakan konvergen jika $\lim_{k\to\infty} e^{(k)} = \mathbf{O}$. Dari pertidaksamaan terakhir jelas bahwa hal ini akan dipenuhi jika $||M|| < 1$. Teorema berikut ini memberikan kriteria kekonvergenan iterasi Gauss–Seidel.

**TEOREMA 2.3 (KEKONVERGENAN ITERASI GAUSS–SEIDEL).**
*Iterasi Gauss–Seidel konvergen untuk setiap vektor awal $\mathbf{X}^{(0)}$ jika dan hanya jika*

*matriks koefisien A bersifat simetris dan definit positif.*[5]

Bukti teorema tersebut dapat dilihat pada [7] halaman 374. Sekalipun teorema di atas memberikan suatu kriteria kekonvergenan iterasi Gauss–Seidel, namun kriteria yang diberikan tidaklah mudah dicek secara praktis, karena harus mengecek apakah matriks koefisiennnya definit positif. Teorema berikut memberikan kriteria yang lebih praktis.

*Metode iterasi Jacoib dan Gauss–Seidel konvergen jika matriks koefisien bersifat* **dominan secara diagonal**.

**TEOREMA 2.4 (KEKONVERGENAN ITERASI JACOBI & GAUSS–SEIDEL).** *Iterasi Jacobi dan Gauss–Seidel konvergen untuk setiap SPL yang memiliki matriks koefisien bersifat dominan secara diagonal.*

Teorema di atas memberikan kriteria kekonvergenan baik untuk iterasi Jacobi maupun Gauss–Seidel. Untuk iterasi Jacobi kriteria tersebut telah disebutkan sebelumnya, dengan melihat contoh nyata.

Perlu dicatat bahwa teorema 2.3, sekalipun agak susah dicek secara praktis, memberikan syarat perlu dan cukup, sedangkan teorema 2.4 hanya memberikan syarat perlu, bukan syarat cukup kekonvergenan iterasi Gauss–Seidel. Artinya, suatu SPL yang tidak bersifat dominan secara diagonal, mungkin dapat disusun ulang menjadi demikian, sehingga iterasi Gauss–Seidel akan konvergen.

BUKTI TEOREMA 2.4: Ingat kembali (lihat persamaan (2.25) dan (2.29)), bahwa iterasi matriks untuk mencari hampiran penyelesaian SPL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan $A_{n\times n}$ dan $\mathbf{b}_{n\times 1}$, dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{x}^{(k)} = M\mathbf{x}^{(k-1)} + C\mathbf{b}.$$

1. Untuk iterasi Jacobi, $M = -D^{-1}(L+U)$ dan $C = D^{-1}$; dan

2. untuk iterasi Gauss-Seidel, $M = -(D+L)^{-1}U$ dan $C = (D+L)^{-1}$;

dengan $A = L + D + U$, $L$ matriks segitiga bawah dari $A$, $D$ matriks diagonal dari $A$, dan $U$ matriks segitiga atas dari $A$. Dengan mendefinisikan $e^{(k)}$ sebagai galat hampiran ke-$k$, seperti (2.31), selanjutnya kita telah mendapatkan hubungan (2.33) dan akhirnya kita tahu bahwa syarat iterasi tersebut konvergen adalah

$$||M|| < 1.$$

[5] *Matriks A dikatakan definit positif jika untuk setiap vektor* $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$.

Sekarang, kekonvergenan kedua iterasi dapat ditinjau secara terpisah.

**Untuk iterasi Jacobi,**

$$
\begin{aligned}
M &= -D^{-1}(L+U) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-1}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{a_{33}} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Dari definisi norm (2.21), diperoleh

$$||M|| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|,$$

sehingga syarat $||M|| < 1$ mengharuskan

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad 1 \le i \le n,$$

yang tidak lain adalah sifat **dominan secara diagonal** matriks $A$. ■

**Untuk iterasi Gauss–Seidel,** perhitungan tidak dapat langsung menggunakan matriks $M = -(L+D)^{-1}U$, karena tidak terlalu mudah. Metode pembuktian untuk kekonvergenan iterasi Gauss–Seidel memerlukan teorema lain tentang **nilai-nilai eigen** matriks $A$. Bukti lengkapnya tidak diberikan di sini. Pembaca yang tertarik dipersilakan untuk melihat referensi [5] halaman 35–37 dan [1] halaman 287.

## LATIHAN 2.6

1. Perhatikan SPL di bawah ini. Dengan menggunakan hampiran awal $p_k = 0$ untuk $k$ =1, 2, . . . , 9, selesaikan SPL tersebut secara iteratif.

$$
\begin{array}{ll}
p_1 = \frac{1}{4}(0+0+p_2+p_4) & p_4 = \frac{1}{4}(p_1+0+p_5+p_7) \\
p_7 = \frac{1}{4}(p_4+0+p_8+1) & p_2 = \frac{1}{4}(0+p_1+p_3+p_5)
\end{array}
$$

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 7 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 1 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 7x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 30 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 8x_3 & = & 12 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 50 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array}$$

(e) Berapakah nilai parameter relaksasi yang optimal untuk masing-masing SPL di atas?

(f) Ulangilah penyelesaian soal (c) dan (d) dengan menggunakan hampiran awal $\mathbf{x0} = (100\ 100\ 100)^T$.

2. Selesaikan SPL-SPL di bawah ini dengan metode Iterasi Gauss-Seidel dan metode SOR (dengan menggunakan nilai parameter relaksasi yang optimal). Bandingkan hasilnya!

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & & & & & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & & & & & = & 0 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & & & = & -1 \\ & & & & -x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & & & = & 1 \\ & & & & & & -x_4 & + & 2x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ & & & & & & & & -x_5 & + & 2x_6 & = & 2 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & & & = & 0 \\ & & & & & & 2x_4 & + & 3x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & & & & & & & & 2x_5 & + & 3x_6 & = & -4 \end{array}$$

3. Metode SOR konvergen jika dan hanya jika nilai parameter relaksasi $\omega$ memenuhi $a < \omega < b$ untuk beberapa nilai $a$ dan $b$ yang tergantung pada SPL yang harus diselesaikan. Carilah nilai-nilai $a$ dan $b$, teliti sampai satu angka desimal, untuk SPL di bawah ini

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 7 \end{array}$$

Carilah nilai $\omega$ yang menghasilkan laju kekonvergenan tercepat!

## 2.8 Rangkuman

Berikut adalah rangkuman dari beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari (hampiran) penyelesaian sistem persamaan (SPL)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dengan $A$ matriks koefisien berukuran $n \times m$, $\mathbf{b}$ vektor konstanta $n \times 1$, dan $\mathbf{x}$ vektor $n \times 1$ yang akan dicari nilainya.

**Matriks Augmented** Matriks $[A|b]$, yakni gabungan matriks koefisien dan vektor konstanta disebut matriks *augmented*.

*Matriks augmented*

**Eliminasi Gauss** Metode eliminasi Gauss dapat digunakan untuk menyelesaikan SPL yang terdiri atas $n$ persamaan dalam $n$ variabel. Proses eliminasi menghasilkan SPL baru yang ekivalen dengan SPL lama, yang memiliki matriks koefisien berbentuk segitiga atas (semua elemen di bawah diagonal utamanya nol). Proses eliminasi menggunakan operasi-operasi baris elementer (OBE):

*Metode eliminasi Gauss*

2. Setiap *leading 1* merupakan satu-satunya elemen bukan nol pada kolom yang bersangkutan.
3. Semua *leading 1* tersusun secara diagonal dari kanan atas ke kiri bawah (tidak harus pada diagonal utama).
4. Baris-baris yang semua elemennya nol terletak pada bagian bawah matriks tersebut.

Banyaknya baris yang memuat elemen tidak nol pada BEBR matriks $A$ disebut **rank** matriks $A$, ditulis rank($A$).

*Fungsi MATLAB* `rank(A)` *menghitung rank matriks A, dan* `rref(A)` *menghasilkan bentuk eselon baris tereduksi matriks A.*

1. Jika rank($A$)=rank($A|B$)=$m$, maka SPL tersebut mempunyai solusi tunggal untuk nilai-nilai $x_i$, $i = 1, \ldots, m$.
2. Jika rank($A$)=rank($A|B$)=$r < m$, maka SPL tersebut mempunyai penyelesaian tidak tunggal dan setiap penyelesaian dinyatakan dalam $(m - r)$ parameter bebas.
3. Jika rank($A$)$\neq$rank($A|B$), maka SPL tidak mempunyai penyelesaian.

*Eliminasi Gauss dan Faktorisasi LU*

**Faktorisasi LU** Jika matriks koefisien $A$ berukuran $n \times n$ dan eliminasi Gauss menghasilkan matriks tereduksi segitiga atas $U$, maka $A$ dapat ditulis sebagai

$$A = LU$$

dengan $L$ berbentuk

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

dengan $m_{n1}, m_{n2}, \ldots, m_{n,n-1}$ adalah pengali-pengali yang digunakan untuk membuat nol pada proses eliminasi. Penyelesaian SPL $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ (dengan $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$), dapat diperoleh dengan: (1) menyelesaikan $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ melalui proses **substitusi maju**, dan (2) menyelesaikan $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ melalui proses **substitusi mundur**.