A

TINJAUAN SINGKAT KALKULUS

Salah satu syarat yang diperlukan untuk mempelajari komputasi numerik adalah pengetahuan dasar tentang kalkulus, termasuk pengenalan beberapa notasi dalam kalkulus, sifat-sifat bilangan riil dan kompleks, pengertian kekontinyuan, limit, turunan, integral, barisan, dan deret. Hal ini mengingat bahwa beberapa metode numerik yang dipakai dalam komputasi numerik didasarkan pada hasil-hasil dalam kalkulus. Sebagai rujukan singkat bagi pembaca yang tidak menginginkan membuka kembali buku kalkulus, berikut disajikan beberapa pengertian dan teorema penting dalam kalkulus.

A.1 Limit dan Kekontinuan Fungsi

DEFINISI A.1 (LIMIT FUNGSI).
Misalkan fungsi $f(x)$ didefinisikan pada himpunan bilangan riil A. Fungsi f dikatakan mempunyai **limit** *L pada $x = x_0$, ditulis*

Pengertian limit fungsi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \tag{A.1}$$

jika diberikan bilangan $\epsilon > 0$ dapat ditemukan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$|f(x) - L| < \epsilon, \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A.$$

Jika dimisalkan $x = x_0 + h$, maka persamaan (A.1) ekivalen dengan

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L \tag{A.2}$$

DEFINISI A.2 (FUNGSI KONTINYU).
Misalkan fungsi $f(x)$ didefinisikan pada himpunan bilangan riil A dan misalkan

pernyataan di bawah ini ekivalen:

1. *Fungsi f kontinu di x_0.*
2. *Jika $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, maka $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

TEOREMA A.2 (TEOREMA NILAI EKSTRIM UNTUK FUNGSI KONTINU).
Jika fungsi $f(x)$ kontinu pada interval $[a,\ b]$, maka terdapat suatu batas bawah M_1 dan suatu batas atas M_2 serta dua buah titik $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ sedemikian hingga

$$M_1 = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M_2, \qquad \forall x \in [a,\ b]. \tag{A.7}$$

Teorema A.2 mengatakan bahwa setiap fungsi yang kontinu pada suatu interval terbatas pada interval tersebut. M_1 disebut **nilai minimum** dan M_2 disebut **nilai maksimum** fungsi $f(x)$ pada interval $[a,\ b]$, dan sering dituliskan

$$M_1 = f(x_1) = \min_{a\leq x\leq b}\{f(x)\}, \quad \text{dan} \quad M_2 = f(x-2) = \max_{a\leq x\leq b}\{f(x)\}.$$

TEOREMA A.3 (TEOREMA NILAI ANTARA).
Misalkan $f(x) \in C[a,\ b]$ dan misalkan

$$m = \min_{a\leq x\leq b}\{f(x)\}, \quad dan \quad M = \max_{a\leq x\leq b}\{f(x)\}.$$

Maka untuk setiap L memenuhi $m \leq L le M$, terdapat c yang memenuhi $a < c < b$ sedemikian hingga $f(c) = L$.

A.2 Turunan Fungsi

DEFINISI A.4.
Misalkan $f(x)$ didefinisikan pada sebuah interval terbuka yang memuat x_0. Fungsi f dikatakan **diferensiabel** *(dapat diturunkan atau mempunyai turunan) di titik x_0 jika terdapat bilangan m sedemikian hingga*

Pengertian fungsi **diferensiabel**

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m. \tag{A.8}$$

dapat titik c, $a < c < b$, sedemikian hingga $f^{(n)}(c) = 0$.

A.3 Integral

DEFINISI A.5 (INTEGRAL RIEMANN).
Misalkan $f \in C[a, b]$, dan $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ adalah suatu partisi $[a, b]$. Untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, n$, misalkan $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ dan $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Maka jumlah

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k, \tag{A.12}$$

disebut **hampiran jumlah Riemann** *untuk integral tentu $f(x)$ pada $[a, b]$. Jika jumlah Riemann tersebut mempunyai limit untuk n menuju tak berhingga, maka limit itu disebut* **integral Riemann**, *ditulis*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k. \tag{A.13}$$

TEOREMA A.9 (TEOREMA DASAR KALKULUS).
Misalkan f kontinu pada $[a, b]$.

1. *Terdapat suatu fungsi F, sedemikian hingga*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a), \tag{A.14}$$

dengan $F'(x) = f(x)$. Fungsi F disebut **antiderivatif** *fungsi f.*

2. *Jika $a < x < b$, maka*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x). \tag{A.15}$$

TEOREMA A.10 (NILAI RATA-RATA UNTUK INTEGRAL).
Jika fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$, maka terdapat titik c, $a < c < b$, sedemikian hingga

$$\frac{1}{b-a}\int_a Tbf(x)\, dx = f(c). \tag{A.16}$$

Misalkan $x_0 \in [a,\ b]$ adalah suatu titik tetap. Deret

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

disebut **deret Taylor** *fungsi f di sekitar x_0, dan dapat dituliskan*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \qquad \text{(A.20)}$$

Dengan memisalkan $x = x_0 + h$, maka

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k. \qquad \text{(A.21)}$$

Demikian pula, jika $x = x_0 - h$, maka

$$f(x_0 - h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(-h)^k. \qquad \text{(A.22)}$$

TEOREMA A.13 (TEOREMA SISA TAYLOR).
Misalkan $f \in C^{n+1}[a,\ b]$ (artinya, f mempunyai turunan ke-1, 2, ..., dan ke-n yang kontinu pada $[a,\ b]$). Misalkan $x_0 \in [a,\ b]$ adalah suatu titik tetap. Untuk setiap $x \in [a,\ b]$ terdapat $c = c(x)$, $a < c < b$, sedemikian hingga

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \qquad \text{(A.23)}$$

dengan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \qquad \text{(A.24)}$$

dan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad \text{(A.25)}$$

$P_n(x)$ disebut **polinomial Taylor berderajad** *n*[1] *dan $R_n(x)$ disebut* **suku sisa**

---

[1] *$P_1(x)$ disebut polinomial Taylor linier, $P_2(x)$ disebut polinomial Taylor kuadratik, $P_3(x)$ disebut polinomial Taylor kubik, dst.*

konvergen ke nol, seperti terlihat pada relasi

$$O(h^{n+1}) \approx Mh^{n+1} \approx \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

untuk h yang cukup kecil. Notasi $O(h^n)$ memiliki sifat-sifat:

1. $O(h^p) + O(h^p) = O(h^p)$
2. $O(h^p) + O(h^q) = O(h^r)$ dengan $r = \min\{p, q\}$
3. $O(h^p)O(h^q) = O(h^{p+q})$.

TEOREMA A.15 (TEOREMA TAYLOR).
Misalkan $f \in C^{n+1}[a, b]$. Jika x_0 dan $x = x_0 + h$ terletak pada interval $[a, b]$, maka

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k \; + \; O(h^{n+1}). \tag{A.27}$$

DEFINISI A.10.
Misalkan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan barisan $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke nol, yakni $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Barisan $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan konvergen ke x dengan orde kekonvergenan $O(r_n)$ jika terdapat sebuah konstanta $K > 0$ sedemikian hingga

$$\frac{|x_n - x|}{|r_n|} \leq K, \quad \text{atau} \quad |x_n - x| \leq K|r_n|$$

untuk n yang cukup besar. Hal ini sering dituliskan sebagai $x_n = x + O(r_n)$, atau $x_n \to x$ dengan orde kekonvergenan $O(r_n)$.

A.6 Menghitung Nilai Polinomial

Misalkan $P_n(x)$ adalah suatu polinomial berderajad n berbentuk

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0. \tag{A.28}$$

Suatu metode untuk menghitung nilai $P_n(x)$ dikenal dengan nama **metode Horner** atau metode **pembagian sintetik**, yang didasarkan pada

Hasil tersebut didasarkan pada perkalian sintetik (A.29). Dari

$$P_n(z) = \underbrace{\underbrace{(\overbrace{(\ldots\underbrace{(\overbrace{a_n}^{b_n}\, z + a_{n-1})}_{b_{n-1}}\, z + \ldots + a_2)}^{b_2}\, z + a_1)}_{b_1}\, z + a_0}_{b_0} .$$

dapat didefinisikan

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= b_n z + a_{n-1} \\ b_{n-2} &= b_{n-1} z + a_{n-2} \\ &\vdots \\ b_1 &= b_2 z + a_1 \\ b_0 &= b_1 z + a_0, \end{aligned} \tag{A.32}$$

yang menghasilkan

$$P_n(z) = b_0.$$

Selanjutnya, jika didefinisikan polinomial (A.30) dengan koefisien-koefisien b_k di atas, dapat diperoleh (A.31).

Hasil di atas bermanfaat untuk mencari akar polinomial dengan mereduksi derajadnya jika salah satu akarnya sudah diketahui. Perhatikan, jika $b_0 = 0$, maka $P_n(z) = 0$, sehingga z merupakan akar persamaan $P_n(x) = 0$.