ANALISIS DAN IMPLEMENTASI METODE NEWTON - RAPHSON (*ANALYSIS AND IMPLEMENTATION OF NEWTON – RAPHSON METHOD*)

Sahid

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Metode **Newton** (lengkapnya *Newton—Raphson,* disingkat NR) merupakan salah satu metode terpopuler untuk menghampiri penyelesaian persamaan $f(x)= 0$ secara iteratif. Metode NR menggunakan sebuah hampiran awal dan nilai turunan padanya untuk mendapatkan hampiran berikutnya. Di dalam metode ini kurva fungsi yang bersangkutan dihampiri dengan garis singgung kurva di titik yang sudah diperoleh.

Hasil analisis dan eksperimen memperlihatkan bahwa kekonvergenan metode NR bersifat kua-dratik (derajad kekonvergenannya 2) ke akar sederhana. Untuk akar ganda, metode NR mempunyai derajad kekonvergenan linier, dan dapat ditingkatkan menjadi kuadratik dengan menggunakan modifikasi rumus iterasinya. Akan tetapi modifikasi rumus iterasi NR memerlukan informasi derajad akar atau perhitungan turunan yang lebih tinggi (untuk mengetahui derajad akarnya).

Meskipun metode NR memerlukan perhitungan turunan fungsi, dengan program **Matlab** untuk masukan cukup digunakan rumus fungsinya dan Matlab dapat menghitung turunan fungsinya. Hal ini dilakukan dengan perhitungan simbolik. Program Matlab yang disusun berbeda dengan program-program implementasi metode NR yang ditemukan di dalam berbagai literatur, yang biasanya masih memerlukan masukan fungsi turunan. Pemilihan hampiran awal dan batas toleransi sangat menentukan kekonvergenan metode NR. Selain itu, kekonvergenan iterasi juga dipengaruhi oleh perilaku fungsi di sekitar hampiran awal dan di sekitar akar. Apabila fungsi yang bersangkutan memiliki beberapa akar, pemakaian metode NR secara berulanga-ulang dengan pemilihan hampiran awal yang sesuai dapat digunakan untuk mendapatkan hampiran akar-akar sebuah persamaan $f(x)= 0$.

Kata Kunci: ***akar persamaan, metode Newton, hampiran, konvergensi, Matlab***

Abstract

The Newton—Raphson (NR) method is one of the most popular numerical (iterative) methods for finding the approximation of the solution of equation of $f(x)= 0$. The method uses an initial approximation dan the derivative of the function at the initial point to get the next approximation. This method approximates the function curve with its tangents.

The analysis and experiment shows that the method converges quadratically to simple roots and converges linearly to multiple roots. However, this linear convergence can be speed up by using the modified NR formulas, though this modification requires further information about the root's degree and calculations of higher derivatives.

Although the NR method requires calculations of derivatives, the implementation of the method using **Matlab** can be simplified so that derivatives do not need to be inputed. This is done by using symbolic calculation programmed in the Matlab codes. The choise of initial approximations and the error limits do affect s the convergence of the NR method. Also, the iteration are very dependent of the function behaviour arround its roots. By using different initial approximations, the method can be used to find different roots (if not single root) of equation $f(x)= 0$.

Keywords: ***equation root, Newton method, approximation, convergence*, *Matlab***

PENDAHULUAN

Salah satu masalah yang sering ditemui di dalam matematika dan sains serta teknik adalah mencari akar persamaan, yakni mencari nilai-nilai x yang memenuhi $f(x)= 0$ (Borse, 1997: 151). Permasalahan ini dapat muncul dari masalah-masalah lain dalam matematika, mi-salnya mencari nilai-nilai *eigen* suatu matriks, menghitung titik potong sebuah kurva dengan sumbu-sumbu koordinat, mencari titik potong dua buah kurva, dan lain-lain.

Kebanyakan fungsi yang harus dicari akarnya tidak selalu berbentuk fungsi sederhana atau suku banyak, seperti $f(x) = (x+1)^2 e^{x^2-2} - 1$, dan tidak ada metode eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya (Jacques & Judd, 1987: 43). Sebagai alternatif penyelesaian persamaan-persamaan demikian adalah pemakaian metode numerik untuk mendapatkan hampiran akar-akarnya. Dengan menggunakan metode numerik, semua permasalahan numerik yang rumit dapat diselesaikan dengan hanya menggunakan operasi-operasi aritmetika sederhana dan logika serta menggunakan prosedur yang dapat dikerjakan oleh komputer (Jacques & Judd, 1987:1-2; Scheid, 1989: 1; Volkov, 1990:9).

Di antara berbagai metode untuk menyelesaikan persamaan $f(x) = 0$ adalah metode **Newton** (lengkapnya *Newton—Raphson,* selanjutnya disingkat NR). Metode **NR** memiliki ciri-ciri: (1) memerlukan sebuah hampiran awal, dan (2) memerlukan perhitungan turunan fungsi $f(x)$ dalam setiap iterasi. Ciri kedua metode Newton tersebut berkaitan dengan fakta bahwa hampir-an berikutnya diperoleh dengan cara menarik garis singgung kurva $y = f(x)$ pada titik yang mempunyai absis hampiran sebelumnya hingga memotong sumbu-*x*. Titik potong garis singgung tersebut dengan sumbu-*x* merupakan hampiran berikutnya. Proses berlanjut sampai hampiran yang diperoleh memenuhi syarat keakuratan yang ditentukan.

Salah satu kendala dalam pemakaian metode Newton adalah keharusan menghitung nilai turunan fungsi. Hal ini tidak selalu mudah jika dilakukan secara manual, terutama untuk fungsi-fungsi tertentu, sekalipun perhitungan dilakukan dengan kalkulator atau komputer. Oleh karena itu, perlu dicari software yang sesuai untuk mengimplementasikan metode Newton yang tidak memerlukan perhitungan turunan fungsi secara manual. **Matlab** dapat digunakan untuk tujuan ini.

Metode NR yang dikaji dalam penelitian ini dibatasi untuk fungsi-fungsi satu variabel. Analisis metode NR meliputi kekonvergenan pada akar sederhana dan akar ganda. Contoh-contoh komputasi numerik dengan program Matlab diterapkan pada beberapa tipe fungsi, yakni fungsi polinomial nonlinier, fungsi eksponensial, fungsi trigonometri, dan kombinasinya. Semua fungsi yang dibahas dalam penelitian ini adalah fungsi kontinyu, setidaknya pada interval yang sedang menjadi perhatian.

DASAR TEORI

Pembahasan metode numerik untuk mencari hampiran akar persamaan memerlukan beberapa pengertian dasar sebagai berikut.

Definisi 1 (Akar Persamaan, Pembuat Nol Fungsi) (Mathews, 1992: 55)

*Misalkan f adalah suatu fungsi kontinyu. Setiap bilangan r pada domain f yang meme-nuhi $f(r) = 0$ disebut **akar persamaan** $f(x) = 0$, atau juga disebut **pembuat nol** fungsi $f(x)$. Apabila tidak menimbulkan kerancuan, r sering dikatan sebagai akar f.*

Definisi 2 (Derajad Akar Persamaan) (Atkinson, 1993: 94; Mathews, 1992: 76)

Misalkan r adalah akar persamaan $f(x) = 0$. Jika terdapat bilangan asli m dan fungsi kontinyu $h(x)$ dengan $h(r) \neq 0$, sedemikian hingga $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = (x - r)^m h(x), \tag{1}$$

*maka r disebut **akar berderajad** m.*

Dari (1) terlihat bahwa jika r pembuat nol $f(x)$ yang berderajad m, maka

$$f(r) = f'(r) = \ldots = f^{(m-1)}(r) = 0, \text{ dan } f^{m}(r) \neq 0.$$

Jika $m = 1$, maka r disebut **akar sederhana**. Jika $m > 1$, maka r disebut **akar ganda**. Untuk $m = 2$, maka r disebut **akar dobel**, dst.

Definisi 3 (Derajad Kekonvergenan) (Atkinson, 1993: 87; Mathews, 1992: 77)

Misalkan $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *suatu barisan yang konvergen ke* r *dan misalkan* $e_n = r - x_n$. *Apabila terdapat sebuah bilangan* m *dan sebuah konstanta* $C \neq 0$, *sedemikian hingga*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^m} = C,$$

maka m *disebut* ***derajad kekonvergenan*** *barisan tersebut dan* C *disebut* ***konstanta galat asimptotik.*** *Khususnya, untuk* $m = 1, 2, 3,$ *kekonvergenanya berturut-turut disebut* ***linier, kuadratik****, dan* ***kubik****.*

Definisi 4 (Titik Tetap Fungsi & Iterasi Titik Tetap) (Atkinson, 1993: 84; Mathews, 1992: 45)

Misalkan g *adalah suatu fungsi. Bilangan* x *pada domain* g *dikatakan merupakan* ***titik tetap*** g *jika memenuhi* $x = g(x)$. *Selanjutnya, iterasi*

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

disebut iterasi titik tetap.

Definisi 5 (Iterasi Newton -- Raphson) (Atkinson, 1993: 69; Mathews, 1992: 72)

Misalkan fungsi f *mempunyai turunan pertama* f'. *Barisan* $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *yang diperoleh dari iterasi*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ untuk \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

disebut barisan iterasi ***Newton****. Fungsi* g *yang didefinisikan sebagai*

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{4}$$

disebut fungsi iterasi Newton – Raphson.

Terdapat hubungan antara akar persamaan $f(x) = 0$ dan titik tetap fungsi g. Dari (4) terlihat bahwa, jika $f(r) = 0$, maka $r = g(r)$. Metode Newton dapat dipandang sebagai contoh khusus metode Titik-Tetap (Conte & de Boor, 1981, 79).

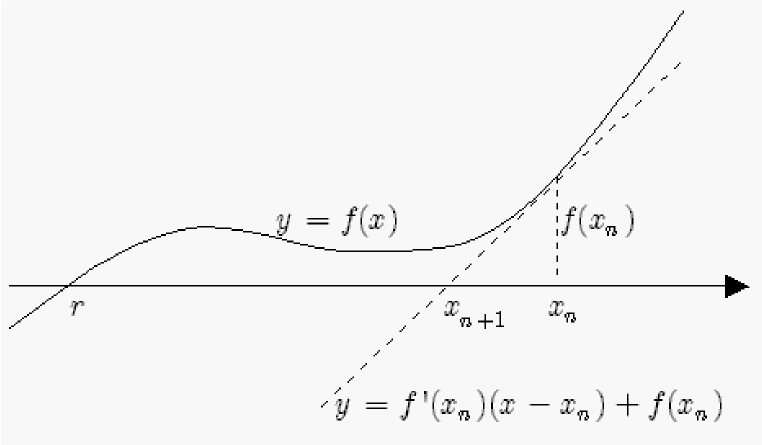
PENURUNAN RUMUS ITERASI NEWTON – RAPHSON

Iterasi Newton – Raphson berawal dari sebuah hampiran awal untuk akar r, kemudian menghitung hampiran selanjutnya dengan cara sebagai berikut.

1. Misalkan x_n adalah hampiran awal pada langkah ke-*n, n=0, 1, 2, ….*
2. Hitung gradien garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ di titik $(x_n, f(x_n))$, yakni $f'(x_n)$ dan tentukan persamaan garis singgungnya, yakni $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.
3. Hampiran berikutnya adalah absis titik potong garis singgung tersebut dengan sumbu-*x*, yakni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{5}$$

Langkah-langkah tersebut diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Iterasi Newton - Raphson

Rumus iterasi (5) juga dapat diturunkan dari deret Taylor $f(x)$ di sekitar x_n, yakni:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(x_n) + \ldots \tag{6}$$

dengan mengasumsikan x_n dan hampiran berikutnya, x_n cukup dekat ke akar r, dan meng-abaikan suku ke-3 dan seterusnya pada ruas kanan (6), akan diperoleh (5). Dalam hal ini, fungsi $f(x)$ telah dihampiri oleh garis singgung di titik $(x_n, f(x_n))$. Jadi pada prinsipnya sama dengan pendekatan geometris sebelumnya.

ANALISIS KEKONVERGENAN METODE NEWTON – RAPHSON

Sebelum membahas kekonvergenan iterasi Newton – Raphson, berikut akan ditinjau sebuah teorema mengenai iterasi titik tetap, yang digunakan dalam pembuktian selanjutnya.

Teorema 1 (Pemetaan Konstraksi) (Atkinson, 1993: 84 - 85)

Misalkan $g(x)$ *dan* $g'(x)$ *kontinyu pada interval* $[a,b]$ *dan memenuhi*

$$x \in [a,b] \Rightarrow a \le g(x) \le b. \tag{7}$$

Selanjutnya, misalkan

$$\lambda = \max_{a \le x \le b} |g'(x)| < 1, \tag{8}$$

maka:

Terdapat sebuah akar tunggal $r \in [a,b]$ *yang memenuhi* $r = g(r)$.

Untuk setiap hampiran awal $x_0 \in [a,b]$, *iterasi titik tetap (2) konvergen ke* r.

Untuk setiap $n \ge 2$ *berlaku* $|r - x_n| \le \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1|$

$\lim_{n \to \infty} \dfrac{r - x_{n+1}}{r - x_n} = g'(r)$, *sehingga untuk* x_n *yang cukup dekat dengan* r *berlaku*

$$r - x_{n+1} \approx g'(r)(r - x_n). \tag{9}$$

Bukti:

Definisikan fungsi $f(x) = x - g(x)$. Karena $g(x)$ kontinyu pada $[a,b]$, maka $f(x)$ juga kontinyu pada interval tersebut. Selanjutnya, dari (7) berlaku $f(a) \le 0$ dan $f(b) \ge 0$, sehingga menurut Teorema Nilai Antara terdapat $r \in [a,b]$ yang memenuhi $f(r) = 0$ atau $r = g(r)$. Selanjutnya, andaikan terdapat dua buah nilai r_1 dan r_2 yang memenuhi $r_1 = g(r_1)$ dan $r_2 = g(r_2)$, maka menurut Teorema Nilai Rata-rata terdapat c antara a dan b yang memenuhi

$$g'(c) = \frac{g(r_2) - g(r_1)}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - r_1} = 1.$$

Hal ini bertentangan dengan hipotesis (8).

Dari (7) , untuk setiap hampiran awal $x_0 \in [a,b]$, nilai-nilai x_n yang dihasilkan oleh iterasi titik tetap (2) juga terletak pada interval $[a,b]$. Selanjutnya, dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata, diperoleh

$$r - x_{n+1} = g(r) - g(x_n) = g'(c_n)(r - x_n), \tag{10}$$

untuk suatu nilai c_n antara r dan x_n. Akan tetapi, karena r dan x_n pada $[a,b]$, maka demikian pula c_n, sehingga dari (8) diketahui bahwa, untuk $n \ge 0$ berlaku

$$\left|r - x_{n+1}\right| \le \lambda \left|r - x_n\right| \le \lambda^2 \left|r - x_{n-1}\right| \le \ldots \le \lambda^{n+1} \left|r - x_0\right| \tag{11}$$

Karena $\lambda < 1$, maka ruas kanan (11) konvergen ke 0, yang berakibat x_n konvergen ke r.

Dengan menggunakan ketidaksamaan segitiga dan (11), diperoleh

$$\begin{aligned} \left|r - x_0\right| &\le \left|r - x_1\right| + \left|x_1 - x_0\right|, \\ &\le \lambda \left|r - x_0\right| + \left|x_1 - x_0\right|, \\ (1 - \lambda)\left|r - x_0\right| &\le \left|x_1 - x_0\right|, \\ \left|r - x_0\right| &\le \frac{1}{1 - \lambda}\left|x_1 - x_0\right|, \end{aligned}$$

sehingga $\left|r - x_n\right| \le \dfrac{\lambda^n}{1 - \lambda}\left|x_0 - x_1\right|$.

Oleh karena x_n konvergen ke r dan c_n antara r dan x_n maka c_n juga konvergen ke r , sehingga , dari (10), diperoleh

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r - x_{n+1}}{r - x_n} = g'(r). \blacksquare \tag{12}$$

Dari hipotesis (8) dapat diketahui bahwa $\left|g'(r)\right| < 1$. Kondisi ini sangat erat kaitannya dengan kekonvegenan iterasi Titik Tetap (2). Akibat berikut memberikan syarat yang lebih mudah daripada syarat pada Teorema 1 untuk menjamin kekonvergenan iterasi (2).

Akibat 1 (Syarat Kekonvergenan Iterasi Titik Tetap)

Misalkan $g(x)$ dan $g'(x)$ kontinyu pada interval $[c,d]$ yang memuat titik tetap r. Jika $\left|g'(r)\right| < 1$, maka terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap hampiran awal $x_0 \in \mathbf{I}_\delta = [r - \delta, r + \delta] \subseteq [c,d]$, iterasi (2) konvergen ke r.

Hasil (12) menunjukkan bahwa iterasi Titik Tetap memiliki kekonvergenan linier. Bagaimanakah jika $g'(r) = 0$? Dalam hal ini iterasi Titik Tetap akan mempunyai tingkat kekonvegenan yang lebih tinggi, sebagaimana dinyatakan dalam Akibat berikut ini.

Akibat 2 (Kekonvergenan Tingkat Tinggi Iterasi Titik Tetap)

Misalkan iterasi Titik Tetap (2) konvergen ke titik tetap fungsi $g(x)$, yakni r. Jika fungsi $g(x)$ memenuhi

$$g'(r) = g''(r) = \ldots = g^{(m-1)}(r) = 0,\ dan\ g^{(m)}(r) \neq 0,\ m \geq 1,$$

maka iterasi Titik Tetap tersebut memiliki derajad kekonvergenan m.

Bukti:

Perhatikan ekspansi $g(x_n)$ di sekitar r, yakni

$$g(x_n) = g(r) + (x_n - r)g'(r) + \frac{(x_n - r)^2}{2} g''(r) + \ldots + \frac{(x_n - r)^{m-1}}{(m-1)!} g^{(m-1)}(r) + \frac{(x_n - r)^m}{m!} g^{(m)}(c_n) \qquad (13)$$

dengan c_n *adalah suatu nilai antara* x_n *dan* r. Dari hipotesis mengenai fungsi $g(x)$, dapat diketahui bahwa *m* suku pertama pada ruas kanan persamaan (13) bernilai nol, sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = g(x_n) = r + \frac{(x_n - r)^m}{m!} g^{(m)}(c_n), \qquad (14)$$

sehingga $\dfrac{(x_{n+1} - r)}{(x_n - r)^m} = \dfrac{g^{(m)}(c_n)}{m!}$. Jadi,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{r - x_{n+1}}{(r - x_n)^m} \right| = \left| \frac{g^{(m)}(r)}{m!} \right|, \qquad (15)$$

yang berarti bahwa iterasi Titik Tetap memiliki derajad kekonvergenan *m*. ■

Berikut ditinjau kekonvergenan iterasi Newton – Raphson (5). Pertama akan ditinjau kasus r *merupakan akar sederhana, yakni* $f'(r) \neq 0$. Dengan kata lain, titik $(0, f(r))$ bukan merupakan titik singgung kurva $y = f(x)$ pada sumbu-*x*. Telah diasumsikan bahwa f kontinyu. Misalkan f memiliki setidaknya dua turunan pertama yang kontinyu pada suatu interval **I** yang memuat akar r. Dari definisi **fungsi iterasi Newton – Raphson** (4) diperoleh

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}, \qquad (16)$$

sehingga $g'(r) = \dfrac{f(r)f''(r)}{[f'(r)]^2} = 0,\ mengingat\ f(r) = 0.$

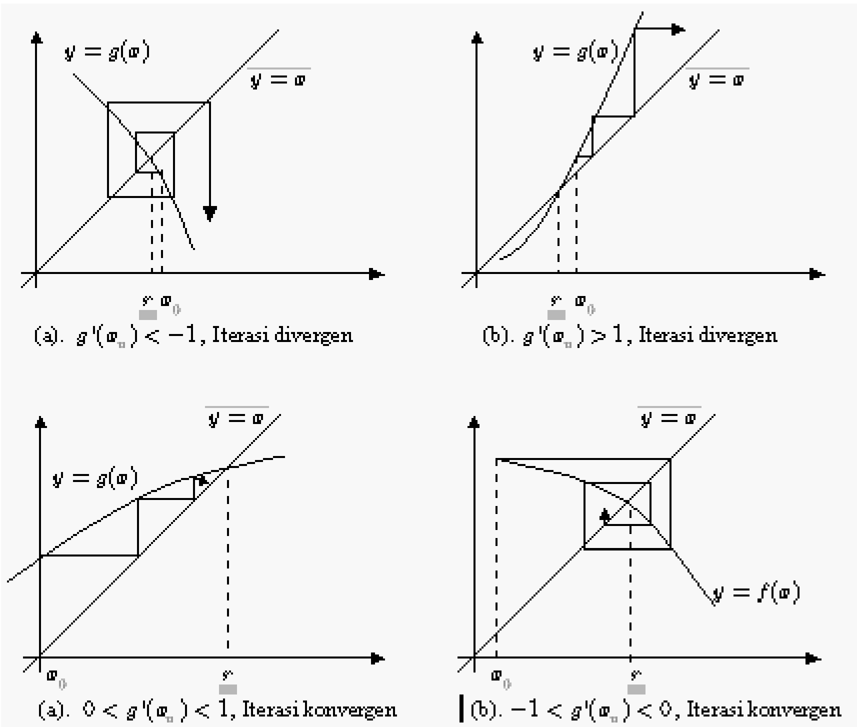
Selanjutnya, karena f, f', dan f'' kontinyu, maka g' juga kontinyu. Oleh karena $g'(r) = 0$, maka menurut Teorema Nilai Antara, dapat dicari suatu interval $\mathbf{I}_d = [r - d, r + d]$ dengan $d > 0$, sedemikian hingga $|g'(x)| < 1$ untuk semua $x \in \mathbf{I}_d$. Sekarang akan dipandang iterasi Newton (5) sebagai iterasi titik tetap terhadap fungsi g:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ dengan } x_n \in \mathbf{I}_\delta. \qquad (17)$$

Oleh karena $|g'(x)| < 1$ untuk semua $x \in \mathbf{I}_\delta$, maka berdasarkan Akibat 1, barisan $\{x_n\}_0^\infty$ yang dihasilkan oleh iterasi (17) konvergen ke r apabila $x_0 \in \mathbf{I}_\delta$. Hasil di atas dapat disimpulkan ke dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 2 (Syarat Kekonvergenan Iterasi Newton – Raphson)

*Misalkan f memiliki setidaknya dua turunan pertama yang kontinyu pada suatu interval **I** yang memuat akar sederhana r, di mana $f(r)=0$. Jika $f'(r) \neq 0$, maka terdapat suatu interval $\mathbf{I}_\delta = [r-\delta, r+\delta]$ dengan $\delta>0$, sedemikian hingga barisan $\{x_n\}_0^\infty$ yang dihasilkan oleh iterasi (17) konvergen ke r apabila $x_0 \in \mathbf{I}_\delta$.*



Gambar 2: Kekonvergenan Iterasi Titik Tetap

Bilangan δ dapat dipilih sedemikian hingga

$$|g'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1, \quad \forall x \in \mathbf{I}_\delta = [r-\delta, r+\delta]. \qquad (18)$$

Akan tetapi, nilai r mungkin tidak diketahui (sebab jika sudah diketahui, tidak perlu lagi digunakan metode numerik!). Oleh karena itu, dalam praktek untuk menjamin kekonvergenan iterasi (17) dapat dicari hampiran awal x_0 pada sebuah interval terkecil **I** yang memuat r (dapat diperkirakan dengan menggambar kurva $y = f(x)$) yang memenuhi $\underset{x \in \mathbf{I}}{Max} |g'(x)| < 1$. Secara visual hal ini dapat diperlihatkan pada **Gambar 2**.

Teorema berikut memberikan alternatif lain untuk menentukan hampiran awal yang menjamin konvergensi iterasi Newton (Conte & de Boor, 1981: 104 – 1-5).

Teorema 3 (Syarat Kekonvergenan Iterasi Newton – Raphson)

Jika kedua turunan pertama $f(x)$ kontinyu pada interval berhingga [a, b] dan $f(x)$ memenuhi syarat-syarat:

(i) $f(a)f(b) < 0$

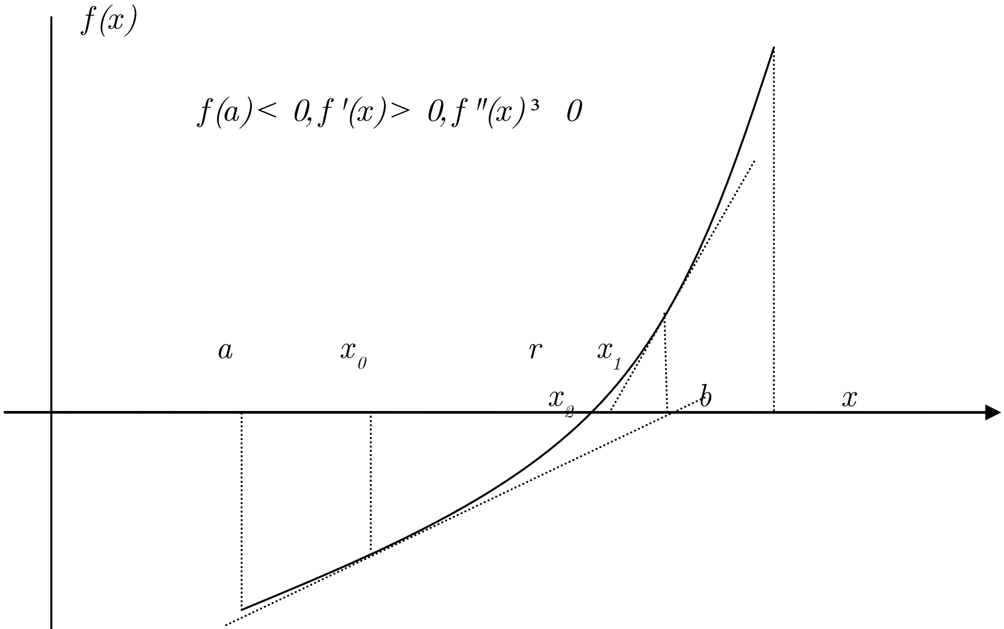
(ii) $f'(x) \neq 0, x \in [a,b]$

(iii) $f''(x) \leq 0 \text{ atau } f''(x) \geq 0 \text{ untuk semua } x \in [a,b]$

(iv) $\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|} < b - a \text{ dan } \dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|} < b - a,$

maka iterasi Newton akan konvergen secara tunggal ke akar $r \in [a,b]$*, di mana f(r)=0, untuk setiap hampiran awal* $x_0 \in [a,b]$.

Syarat (i) menjamin adanya akar pada [a, b] (Teorema Nilai Antara). Bersama syarat (ii) dijamin adanya akar tunggal pada [a, b] (Teorema Nilai Rata-rata). Syarat (iii) menyatakan bahwa pada [a, b] kurva $y = f(x)$ bersifat cekung ke atas atau ke bawah dan juga, syarat (ii) berarti $f'(x)$ monoton positif atau monoton negatif (jadi $f(x)$ monoton naik atau monoton turun) pada [a, b]. Akibatnya, titik potong garis singgung kurva di (*a,f(a)*) dengan sumbu-*x* berada di kanan *a* dan titik potong garis singgung kurva di (*b,f(b)*) dengan sumbu-*x* berada di kiri *b*. Karena syarat (iv), kedua titik potong berada pada interval [a, b]. Dengan demikian, iterasi Newton akan menghasilkan barisan hampiran pada [a, b].



Gambar 3 Iterasi Newton untuk fungsi cekung dengan turunan monoton

Tanpa kehilangan sifat umum, misalkan $f(a) < 0$ dan $f''(x) \geq 0$ pada [a, b] (kurva $y = f(x)$ bersifat cekung menghadap ke atas, seperti pada Gambar 3). Dari iterasi Newton

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

(i) jika $r < x_0 \leq b$, maka keempat syarat di atas dipenuhi pada interval $[a, x_0]$, sehingga $r \leq x_1 < x_0$ dan iterasinya akan konvergen secara menurun ke r;

(ii) jika $a \le x_0 < r$, maka $r < x_1 \le b$, sehingga iterasi berikutnya persis seperti kasus (i).

Untuk kasus-kasus $f(a)$ dan $f''(x)$ yang lain dapat diturunkan secara serupa.

ANALISIS GALAT METODE NEWTON - RAPHSON

Dengan menggunakan hipotesis tentang gungsi f dan akar sederhana r pada bagian **DASAR TEORI**, misalkan E_n menyatakan galat hampiran Newton pada iterasi ke-*n*, yakni $E_n = r - x_n$. Oleh karena $f'(r) \neq 0$ dan f' kontinyu, maka $f'(x) \neq 0$ untuk nilai-nilai x_n yang dekat dengan r. Demikian pula, misalkan $f(x_n) \neq 0$, sehingga dengan menggunakan Teorema Taylor diperoleh

$$f(r) = f(x_n) + E_n f'(x_n) + \frac{1}{2} E_n^2 f''(c_n)$$

dengan c_n terletak antara x_n dan r. Oleh karena $f(r)=0$ dan $f(x_n) \neq 0$, maka dari rumus ite-rasi (17) diperoleh

$$E_{n+1} = r - x_{n+1} = \left[\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}\right] E_n^2. \tag{19}$$

Apabila iterasi (17) konvergen, maka $x_n \to r$ dan $c_n \to r$ $jika$ $n \to \infty$. Dengan demikian didapatkan

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n^2} \right| = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| = C. \tag{20}$$

Persamaan (20) menyatakan bahwa kekonvergenan iterasi Newton ke akar sederhana bersifat kuadratik. Selanjutnya ditinjau kasus akar ganda.

Jika r adalah akar ganda berderajad $m > 1$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x) = (x - r)^m h(x)$ dengan h adalah fungsi kontinyu yang bersifat $h(r) \neq 0$. Selanjutnya,

$$f'(x) = (x - r)^{m-1} \left[m h(x) + (x - r) h'(x) \right].$$

Oleh karena itu, dari definisi (4) diperoleh

$$g(x) = x - \frac{(x - r) h(x)}{m h(x) + (x - r) h'(x)}, \tag{21}$$

sehingga

$$g'(x) = \frac{m(m-1) h^2(x) - m(x-r) h(x) - (x-r) h'(x) - (x-r)^2 h(x) h''(x)}{\left[m h(x) + (x - r) h'(x) \right]^2}, \tag{22}$$

sehingga $|g'(r)| = \dfrac{m-1}{m} < 1$, karena $m > 1$. Berdasarkan Akibat 1 dapat dicari suatu interval yang memuat r dan hampiran awal yang menjamin iterasi:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{(x_n - r) h(x_n)}{m h(x_n) + (x_n - r) h'(x_n)} \tag{23}$$

konvergen ke r. Selanjutnya, dari (23) dapat diturunkan galat iterasi

$$E_{n+1} = E_n + \frac{-E_n h(x_n)}{m h(x_n) - E_n h'(x_n)} = E_n \left\{ \frac{(m-1)h(x_n) - E_n h'(x_n)}{m h(x_n) - E_n h'(x_n)} \right\}, \tag{24}$$

atau

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \left\{ \frac{(m-1)h(x_n) - E_n h'(x_n)}{m h(x_n) - E_n h'(x_n)} \right\}. \tag{25}$$

Jika x_n konvergen ke r, maka $\lim_{n \to \infty} E_n = 0,$ sehingga

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n} \right| = \frac{m-1}{m} \tag{26}$$

mengingat $h(r) \neq 0$. Persamaan pada (26) sesuai dengan hasil (12). Dari (26) diketahui bahwa kekonvergenan iterasi Newton – Raphson ke akar ganda bersifat linier.

Hasil-hasil di atas dapat dirangkum dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 4 (Laju Kekonvergenan Iterasi Newton – Raphson)

Misalkan barisan barisan $\{x_n\}_0^{\infty}$ *yang dihasilkan oleh iterasi (5) konvergen ke* r*, di mana* $f(r)=0$*. Misalkan* E_n *menyatakan galat hampiran Newton pada iterasi ke-n, yakni* $E_n = r - x_n$*.*

Jika r *akar sederhana, maka kekonvergenan tersebut bersifat kuadratik, yakni* $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n^2} \right| = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|$*.*

Jika r *akar ganda berderajad* $m > 1$ *, maka kekonvergenan tersebut bersifat linier, yakni* $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{E_{n+1}}{E_n} \right| = \frac{m-1}{m}$*.*

Selanjutnya akan ditinjau alternatif lain pemilihan hampiran awal x_0 yang sesuai untuk men-jamin kekonvergenan iterasi Newton – Raphson. Untuk kasus akar sederhana, dari (19) dapat diperoleh hubungan

$$r - x_{n+1} \approx \lambda (r - x_n)^2$$

untuk nilai-nilai x_n yang dekat dengan r, dengan $\lambda = \frac{-f''(r)}{2f'(r)}$, mengingat $f'(r) \neq 0$. Dengan asumsi semua x_n dekat dengan r, secara induktif diperoleh

$$\lambda (r - x_n) \approx \left[\lambda (r - x_0) \right]^{2^n}, \qquad n \geq 0. \tag{27}$$

Agar $x_n \to r \;\; atau \;\; (r - x_n) \to 0$, syaratnya adalah $\left| \lambda (r - x_0) \right| < 1$, atau

$$\left| r - x_0 \right| < \left| \frac{1}{\lambda} \right| = \left| \frac{2f'(r)}{f''(r)} \right|. \tag{28}$$

Jadi, agar iterasi (5) konvergen ke akar sederhana r, maka hampiran awal x_0 harus dipilih yang memenuhi (28). Terlihat, jika nilai mutlak λ cukup besar, maka x_0 harus dipilih cukup dekat dengan r. Akan tetapi, oleh karena r mungkin tidak diketahui, maka jika demikian nilai λ juga tidak diketahui. Dalam hal ini, hampiran awal dapat dipilih berdasarkan Teorema 2. Pemakaian hampiran awal sebarang tidak menjamin kekonvergenan iterasi Newton.

IMPLEMENTASI METODE NEWTON-RAPHSON

Program MATLAB yang mengimplementasikan metode NR, yakni **nrsym.m,** telah di-susun oleh peneliti. Untuk perbandingan juga disusun program yang mengimplementasikan metode NR termodifikasi (**mnrsym.m**) untuk akar ganda. Pada program-program MATLAB tersebut digunakan kriteria selisih kedua hampiran terakhir, hampiran galat relatif iterasi terakhir, dan nilai fungsi. Untuk menghindari pembagian dengan nol pada perhitungan galat relatif tersebut digunakan nilai **eps** (= 2.2204x10^{-16}), yang pada MATLAB merupakan nilai keakuratan relatif titik mengambang (*floating point relative accuaracy*). Untuk mengetahui pe-rilaku fungsi di sekitar hampiran awal, program **nrsym.m** dan **mnrsym.m,** selain melakukan iterasi juga menghasilkan gambar kurva fungsi dan turunannya.

Penggunaan program-program MATLAB tersebut memerlukan masukan berupa fungsi (harus), derajad akar (khusus dan wajib untuk program **mnrsym.m**), hampiran awal (opsional), batas toleranasi galat (opsional), dan maksimum iterasi dilakukan (opsional), serta parameter untuk menentukan format tampilan hasil. Pada kedua program tidak diperlukan masukan turunan fungsi, karena program akan menghitung sendiri turunan fungsi yang diberikan. Fungsi dapat dituliskan dalam bentuk ekspresi (rumus) atau variabel yang menyimpan ekspresi tersebut. Apabila masukan opsional tidak diberikan, program akan menggunakan nilai-nilai default, yakni hampiran awal $x_0 = 0$, batas toleransi $d = 10^{15}$ dan maksimum iterasi $N = 50$. Petunjuk selengkapnya sudah dituliskan di dalam program, yang dapat ditampilkan dengan menuliskan perintah **help *nama_program*.**

Pemilihan hampiran awal dan nilai batas toleransi dapat mempengaruhi konvergensi iterasi. Di depan sudah diuraikan beberapa syarat cukup untuk menentukan hampiran awal agar iterasi Newton. Akan tetapi, syarat-syarat tersebut hanyalah merupakan syarat cukup, tidak merupakan syarat perlu, sehingga pemakaian hampiran awal yang tidak memenuhi syarat-syarat pada Teorema 2 maupun Teorema 3 boleh jadi akan menghasilkan iterasi yang konvergen. Di sinilah perlunya dilakukan eksperimen (perhitungan secara numerik) dengan menggunakan program-program yang telah disusun. Eksperimen juga dapat digunakan untuk memverifikasi hasil-hasil analisis di atas.

Hasil-hasil Eksperimen

Eksperimen komputasi dengan menggunakan program-program yang telah disusun dilakukan pada fungsi-fungsi di bawah ini.

1. $f(x) = x^6 - x - 1$ (Atkinson, 1993: 63, 80)
2. $f(x) = e^x - 3$ (Conte & de Boor, 1981: 106)
3. $f(x) = x + e^{-Bx^2} \cos(x), \quad B = 1, 2, 5, 10, 25, 50$. (Atkinson, 1993: 77)
4. $f(x) = (x - 1)^3$ (Atkinson, 1993: 67, 78) → akar tripel
5. $f(x) = (x - 1.1)^3 (x - 2.1)$. (Atkinson, 1993: 95)
6. $f(x) = (x - 1)(e^{x-1} - 1)$. → akar dobel
7. $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$. (Conte & de Boor, 1981: 105; Atkinson, 1993: 67)
8. $f(x) = xe^{-x}$. (Mathews, 1992: 79, 88) → NR divergen

Berikut disajikan beberapa tabel hasil eksperimen dengan metode NR pada fungsi-fungsi di atas. Untuk kasus akar ganda juga disajikan hasil komputasi dengan metode NR termodifikasi. Jika tidak dicantumkan, semua eksperimen menggunakan batas toleransi 10^{15}.

Tabel 1. Iterasi NR lengkap untuk $x^6 - x - 1 = 0$

Iterasi	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$	$r - x_{n-1}.$
0	0	-1	0	-0.778089598678601
1	-1	1	1	0.221910401321399
2	-0.857142857142857	0.253712313746823	-0.142857142857143	0.0790532584642561
3	-0.789951850459548	0.032950424213666	-0.0671910066833093	0.0118622517809468
4	-0.77837271113595	0.000768013750394037	-0.0115791393235981	0.000283112457348689
5	-0.778089761192171	4.4060599257989e-007	-0.000282949943779022	1.6251356971253e-007
6	-0.778089598678655	1.4521717162097e-013	-1.62513516092177e-007	5.36237720893951e-014
7	-0.778089598678601	2.22044604925031e-016	-5.35620693085042e-014	1.11022302462516e-016
8	-0.778089598678601	-1.11022302462516e-016	-8.18991885451312e-017	0

Tabel 2 Iterasi NR untuk $e^x - 3 = 0$ **dan** $x + e^{-Bx^2}\cos(x) = 0$

$e^x - 3 = 0$			$x + e^{-Bx^2}\cos(x) = 0$			
x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke	B	x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke
0	1.0986122886681098	7	1	0	-0.588401776500996	6
1	1.0986122886681098	5		0.5	-0.588401776500996	8
10	1.0986122886681098	14		-0.5	-0.58840177650099634	4
-3	gagal	50	2	0	-0.513732724126289	7
-1	1.0986122886681098	11	5	0	-0.404911548209309	9
0.5	1.0986122886681096	6	10	0	Gagal (berputar-putar)	50
1.7	1.0986122886681098	6		-0.5	-0.32640201009749875	6
1.8	1.0986122886681098	5		-0.25	-0.32640201009749875	5
Persamaan $e^x - 3 = 0$ mempunyai penyelesaian (akar) $r = \ln(3) \approx 1.0986.$ Dalam hal ini, $\lvert g(x)\rvert < 1 \text{ untuk } x > \ln(3/2)$. Jadi, jika $\lvert x_0 - r\rvert < r - \ln(3/2)$ atau $0.406 < x_0 < 1.792$, maka iterasinya akan konvergen.				0.25	-0.32640201009749875	9
			25	0	Gagal (berputar-putar)	50
			50	0	Gagal (berputar-putar)	50
				1	Gagal (berputar-putar)	50
				-0.3	-0.183291333294485	7
				0.3	-0.183291333294485	6
				-0.5	Gagal (berputar-putar)	-

Kurva $y = x^6 - x - 1$ hampir datar (gradiennya mendekati nol) di sekitar x= 0.7 dan hampir tegak pada interval x>1 dan x<-1. Persamaan $x^6 - x - 1 = 0$ mempunyai dua buah akar nyata, yakni

$$r_1 = -0.77808959867860109788068230965929 \approx -0.778, \quad dan$$

$$r_2 = 1.1347241384015194926054460545065 \approx 1.135.$$

Jika $g(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$, maka $\lvert g(x)\rvert < 1$ untuk $x < d_1 \ atau \ x > d_2$ dengan

$$d_1 = 0.38414468140916746824964645853990 \approx 0.384$$

$$d_2 = 1.0137368367302129894266430165240 \approx 1.014.$$

Dalam kasus ini, jika $\lvert x_0 - r_1\rvert < r_1 - d_1 \quad atau \quad \lvert x_0 - r_2\rvert < r_2 - d_2$, yakni $-1.940 < x_0 < 0.384$ atau $1.014 < x_0 < 1.256$, maka iterasi Newton akan konvergen. Namum hal ini tidak berarti bahwa untuk hampiran awal di luar interval-interval tersebut iterasinya pasti tidak konvergen.

Untuk kasus B=1, kurva $y = x + e^{-Bx^2}\cos(x)$ berupa garis lurus dengan gradien 1 di luar interval [-1.8366, 1.8366]. Semakin besar nilai B, semakin kecil interval tersebut. Untuk semua nilai

B, kurva melengkung ke atas dan menceng ke kanan di dalam interval yang sesuai dengan titik balik semakin mendekati ke (0,1) semakin besar nilai B. Gradien di titik (0,1) sama dengan 1. Semakin besar nilai B, akarnya semakin mendekati nol dari kiri. Untuk kasus B=10 akarnya adalah $r = -0.32640201009749872199953005910687 \approx -0.3264$. Dari hasil perhitungan diperoleh, $|g(x)| < 1$ jika $x < -0.6330$, $-0.5220 < x < -0.116746$, $0.1904 < x < 0.25$, atau $x > 0.6962$. Jadi jika x_0 pada interval-interval tersebut, iterasinya akan konvergen.

Tabel 3 Iterasi NR dan Modifikasi NR untuk $(x-1.1)^3(x-2.1)=0$ dan $(x-1)^3=0$

$(x-1.1)^3(x-2.1)=0$					$(x-1)^3=0$ (Metode NR)			
x_0	Metode NR		Modifikasi NR					
	Konvergen ke	Ite-rasi ke	Konvergen ke	Ite-rasi ke	d	x_0	Konvergen ke	Ite-rasi ke
0	1.0999999999999985	85	1.1000000000000001	5	1e-15	0	Gagal (sangat lambat)	50
1	1.0999999999999981	78	1.1000000000000001	4		1.25	1.0000000000000013	81
1.5	1.1000000000000016	81	1.1000000000000001	5		1.5	1.0000000000000018	82
1.75	1.1000000000000016	79	1.1000000000000001	6		5	1.000000000000002	87
3	2.1000000000000001	8	Gagal (berputar-putar)	500	1e-10	0	0.99999999986231403	56
2	2.1000000000000001	6	Gagal (berputar-putar)	500		1	Gagal (titik belok kurva)	-
-3	1.0999999999999983	89	1.1000000000000001	6		1.5	1.0000000001548968	54
5	2.1000000000000001	11	Gagal (berputar-putar)	500		5	1.0000000001631835	59

Persamaan $(x-1)^3=0$ mempunyai akar $r=1$, yang berderajad 3. Iterasi Newton cukup lambat. Dengan menggunakan rumus Newton termodifikasi, iterasinya akan konvergen ke akar tersebut pada iterasi ke-1, berapapun hampiran awal x_0 yang dipakai (asalkan berhingga). Hal ini dikarenakan rumus iterasi Newton termodifikasi adalah $x_n = 1$.

Persamaan $(x-1.1)^3(x-2.1)=0$ mempunyai r=1.1 adalah akar berderajad tiga, r=2.1 adalah akar sederhana. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa $|g(x)| < 1$ jika

x<1.6863365823230057140504268859383 atau x> 2.0136634176769942859495731140617.

Jadi, iterasi NR konvergen apabila x_0 pada interval-interval tersebut, meskipun iterasi NR termodifikasi belum tentu konvergen (khususnya jika hampiran awal lebih dekat ke akar sederhana).

Tabel 4 Iterasi NR dan Modifikasi NR untuk $(x-1)(e^{x-1}-1)=0$ dan $e^{-x}-\sin(x)=0$

<table>
<tr><td colspan="5">$(x-1)(e^{x-1}-1)=0$</td><td colspan="3" rowspan="2">$e^{-x}-\sin(x)=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">x_0</td><td colspan="2">Metode NR</td><td colspan="2">Modifikasi NR</td></tr>
<tr><td>Konvergen ke</td><td>Iterasi ke</td><td>Konvergen ke</td><td>Iterasi ke</td><td>x_0</td><td>Konvergen ke</td><td>Iterasi ke</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0.99999999999999956</td><td>50</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td><td>0.58853274398186106</td><td>5</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>0.99999999999999933</td><td>50</td><td>1</td><td>6</td><td>0.6</td><td>0.58853274398186106</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1.0000000000000009</td><td>51</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>0.58853274398186106</td><td>5</td></tr>
<tr><td>-2</td><td>0.99999999999999944</td><td>50</td><td>1</td><td>7</td><td>2</td><td>25.132741228730506 *</td><td>500</td></tr>
<tr><td colspan="5" rowspan="4">Persamaan $(x-1)(e^{x-1}-1)=0$ mempunyai sebuah akar r=1, yang merupakan akar dobel. Untuk kasus ini berlaku $|g(x)| < 1$ untuk semua x riel, sehingga iterasinya akan konvergen berapapun hampiran awal, asalakan berhingga. Sudah tentu semakin jauh hampiran awal dari akar tersebut, semakin lambat iterasi akan konvergen.</td><td>1.75</td><td>182.21237390820801</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3.0963639324106462</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3.0963639324106462</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>9.4246972547385219</td><td>7</td></tr>
</table>

*) gradien kurva di titik tsb. -1, iterasinya dilaporkan belum konvergen

Fungsi $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$ semakin lama semakin periodik, mendekati –sin(x), akarnya semakin ke kanan semakin mendekati kelipatan pi.

Tabel 5 Iterasi NR untuk $xe^{-x} = 0$

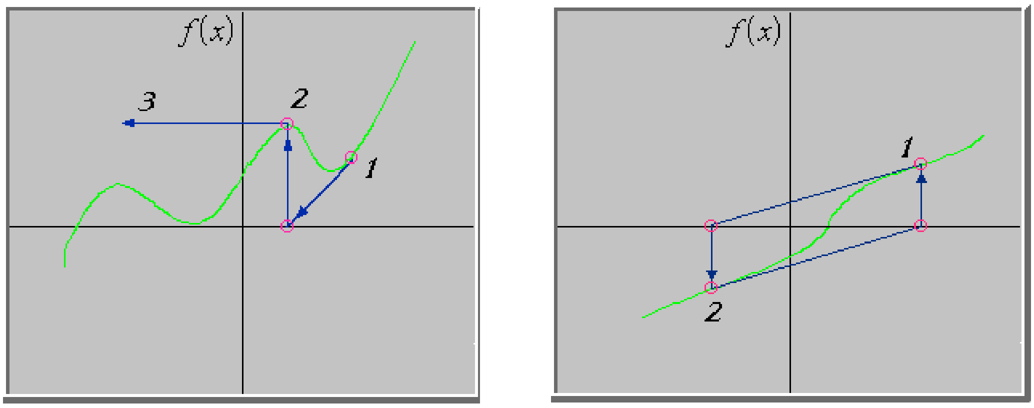
x_0	Konvergen ke	Pada iterasi ke
1	Gagal (titik balik kurva)	-
2	Gagal (menjauh ke kanan)	50
0.2	0	6
0.5	0	8
-2	0	9
0.35	0	7
0.3	0	7
-3	0	11

Untuk fungsi ini, $|g(x)| < 1$ jika x<0.3718, sehingga iterasinya akan konvergen jika hampiran awalnya pada interval tersebut.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berikut adalah beberapa kesimpulan yang diperoleh dari penyelidikan metode NR.

1. Metode NR konvergen secara **kuadratik**. Di dekat akar sederhana, cacah digit akurat menjadi dua kali lipat pada setiap langkah.
2. Meskipun metode NR memerlukan perhitungan nilai turunan fungsi, telah dapat disusun program Matlab yang dapat melakukan secara simbolik perhitungan turunan fungsi, sehingga tidak perlu dihitung secara manual. Hal ini yang biasanya tidak ditemukan pada implementasi NR yang ada pada beberapa literatur.
3. Metode NR mungkin tidak stabil jika dimulai dari titik yang jauh dari akar yang hendak dicari dan metode NR akan konvergen secara lambat atau mungkin gagal jika kurva fungsinya hampir datar di sekitar akar atau titik-titik belok / balik, yakni jika terjadi $f'(x) = 0$.
4. Syarat cukup namun tidak perlu agar metode NR konvergen dinyatakan pada Teorema 2 dan Teorema 3.



(a) **(b)**

Gambar 4 Situlasi penyebab kegagalan iterais Newton-Raphson

5. Metode NR tidak akan konvergen jika:

   a. Hampiran awal berupa titik ekstrim fungsi – iterasinya menjauh dari akar (Gambar 4 (a)).
   b. Garis singgung kurva di titik awal sejajar dengan kurva pada arah perpotongannya dengan sumbu-*x*, iterasinya berputar-putar (Gambar 4 (b)).
   c. Kurva fungsinya naik turun.
6. Metode NR cukup lambat konvergen jika:
   a. digunakan untuk menghampiri akar ganda;
   b. kurvanya "landai" di sekitar akar.
7. Ringkasan kekuatan dan kelemahan metode Newton-Raphson disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel 6 Kekuatan dan kelemahan metode NR

Kekuatan	**Kelemahan**
Rumus iterasi dapat diperoleh dari deret Taylor maupun pendekatan grafis (garis singgung).	Pemilihan hampiran awal mungkin tidak dapat dilakukan secara sebarang.
Secara lokal, laju kekonvergenan bersifat kuadratik jika hampiran dekat ke akar (sederhana).	Laju kekonvergenan tidak dijamin jika hampiran tidak dekat ke akar.
Ada kemungkinan laju kekonvergenan lebih cepat daripada kuadratik.	Metode NR mungkin tidak konvergen.
Galat hampiran dapat diestimasi.	Metode NR mungkin konvergen secara pelan.
Mudah diimplementasikan.	Memerlukan perhitungan nilai fungsi dan turunannya pada setiap iterasi.
Sangat efisien jika dipakai untuk mencari akar polinomial.	Pemilihan kriteria penghentian iterasi tidak jelas.
Dapat dimodifikasi untuk mendapatkan laju kekonvergenan kuadratik ke akar ganda.	Memerlukan pengethuan tentang derajad akar, yang belum tentu dapat diketahui di awal.

Masalah-masalah yang mungkin timbul pada pemakaian metode NR:
1. Kurva mendekati sumbu-*x* pada interval yang cukup lebar di sekitar akar ganda;
2. Akar merupakan titik ekstrim (maksimum/minimum lokal);
3. Hampiran awal cukup jauh dari akar;
4. Akar kompleks;
5. Fungsinya monoton turun positif di sebalah kanan/kiri akar atau monoton naik negatif di sebelah kanan/kiri akar. Contoh: f(x)=xe-x, x0=2;
6. Iterasi berputar-putar
7. |g'(x)|>=1, g(x)=x-f(x)/f'(x) akan menyebabkan ietrasinya manjauh dari akar secara berputar-putar.

Saran-saran

Baik metode NR sebaiknya tidak dipakai secara mandiri. Hal ini dikarenakan pemilihan hampiran awal pada metode ini sangat berpengaruh terhadap kekonvergenannya. Untuk menjamin kekonvergenan metode NR dapat dipakai metode **hibrida** (metode campuran), yakni:
1. Iterasi dimulai dengan metode stabil (misalnya metode Bagi Dua atau metode Posisi Palsu).
2. Setelah dekat ke akar digunakan metode NR untuk mempercepat iterasi dan memperoleh hampiran yang lebih akurat

Oleh karena penelitian ini hanya dibatasi pada fungsi-fungsi satu variabel, maka penelitian ini dapat diteruskan ke fungsi-fungsi dua atau tiga variabel. Masalah ini lebih rumit daripada masalah pencarian akar fungsi satu variabel. Kajian metode NR pada fungsi-fungsi multivariabel merupakan tantangan yang menarik untuk dikaji lebih lanjut. Permasalahan lain yang menarik adalah aplikasi metode NR secara khusus untuk menghampiri akar-akar kompleks polinomial.

DAFTAR PUSTAKA

Atkinson, Kendal (1993). *Elementar Numerical Analysis*. second edition. John Wiley & Sons, Singapore.

Borse, G.J (1997). *Numerical Methods with MATLAB, A Resource for Scientiests and Engineers*. PWS Publishing Company, Boston.

Conte, Samuel D. & Carl de Boor (1981). *Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach*. 3rd edition. McGraw-Hill Book Company, Singapore

Gerald, Curtis F. & Patrick O. Wheatly (1994). *Applied Numerical Analysis*. 5th edition. Addison-Wisley Pub. Co., Singapore

Jacques, Ian & Colin Judd (1987). *Numerical Analysis*. Chapman and Hall, New York.

Mathews, John H (1992). *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*. second edition. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New York.

Scheid, Francis (1989). *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Numerical Analysis*. 2/ed. McGraw-Hill Book Company, Singapore.

Volkov, E. A (1990). *Numerical Methods*. Hemisphere Publishing Company, New York.

LAMPIRAN

A. Program Iterasi Newton – Raphson

```
function hasil = nrsym(f,x0,delta,N,tabel)
%----------------------------------------------------------------------
% nrsym.m (Newton-Raphson) ditulis oleh Sahid (c) 2002-3
% Iterasi  Newton-Raphson untuk menghampiri akar persamaan f(x)=0
%                  f(x_n)
% x_{n+1} = x_n - ------, n= 0, 1, 2, ...
%                  f'(x_n)
% Contoh-contoh pemakaian:
%   nrsym('x^6-x-1',x0,delta,epsilon,N,1)
%   hasil = nrsym('cos(x)',0.1,delta,N);
%   f='cos(x)'; nrsym(f,1,1e-15,50);
%   syms x;f=exp(x)-sin(x); nrsym(f,1,1e-15,50);
%   nrsym('x^2*sin(x^2)-exp(x)');
% Input:
%   f       : ekspresi atau variabel simbolik yang mendefinisikan f(x)
%   x0      : hampiran awal
%   delta   : batas toleransi kekonvergenan hampiran r
%   N       : maksimum iterasi
%   tabel   : format tampilan hasil (1=pakai tab -> tabel pada MS Word),
%             (tidak dipakai = dalam bentuk tabel)
% Output:
%   hasil      -> matriks penyimpan hasil-hasil iterasi, dengan kolom:
%   1: iterasi -> nomor urut iterasi
%   2: x       -> nilai-nilai hampiran
%   3: fx      -> nilai-nilai f(x)
%   4: galatx  -> selisih dua hampiran berturut-turut = x_n - x_{n-1}
%   5: E_n     -> galat hampiran ke-n
%---------------------------------------------------------------------
if nargin==0 error('Anda harus menuliskan fungsinya!');
   else
    if (isvarname(f)) % cek format masukan fungsi
       help nrsym;     % Tampilkan petunjuk jika masukan berupa nama fungsi!
       error('Perhatikan petunjuk di atas!')    % Program terhenti!
    end
    if nargin<2, x0=0; delta=1e-15; N=50;      % Set nilai-nilai parameter
```

```
       else if nargin<3,   delta=1e-15; N=50;  % jika tidak diberikan
            else if nargin<4, N=50;
end;end;end;end
df=diff(f);       % hitung fungsi turunan ( f')
y1=subs(f,x0-2);y2=subs(f,x0+2);
ymin=-min(5,min(abs(y1),abs(y2)));
ymax=min(25,max(abs(y1),abs(y2)));
ezplot(df,[x0-2,x0+2]);grid on;hold on
% plot f'(x) dengan garis putus-putus
set(findobj(gca,'Type','line','Color',[0 0 1]),'lineStyle',':')
ezplot(f,[x0-2,x0+2]); hold off;    % plot f(x) dengan garis mulus
set(gca,'YLim',[ymin ymax])         % set batas-batas y yang sesuai
iterasi=0;
dx=x0;
fx= subs(f,x0);   % hitung f(x0)
hasil=[iterasi,x0,fx,dx];
for k=1:N,
  df0 = subs(df,x0);  % hitung nilai f'(x0)
  if df0==0,        % iterasi harus dihentikan jika f'(x0)=0
    if k>5, disp(num2str(hasil(k-5:k,:),17));
    else disp(num2str(hasil,18));end
    error(['Stop, bertemu garis singgung mendatar di x=
',num2str(x0),'!']);
    else  dx = fx/df0;
  end
  x = x0 - dx;        % hampiran berikutnya, x
  fx = subs(f,x);     % hitung f(x)
  err = abs(dx);      % beda dengan hampiran sebelumnya
  relerr = err/(abs(x)+eps);   % hampiran galat relatif
  hasil=[hasil;[k,x,fx,dx]];   % simpan hasilnya
  x0=x;
  iterasi=k;
  if ((err<delta|relerr<delta) & abs(fx)<delta)|fx==0,
    % iterasi konvergen -> tambahkan kolom r-x_n
    disp('Iterasi konvergen dengan hasil sebagai berikut:');
    r=hasil(iterasi+1,2);       % akar yang diperoleh
    if (nargin==6 & tabel==1),  % tampilkan hasil dengan pemisah kolom TAB
       hasil=sprintf('%d\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\n',hasil');
    else
    disp(num2str(hasil,18));    % atau tampilkan hasil dengan format tabel
    end
    break
    else if iterasi==N, disp('Iterasi mungkin tidak konvergen!'),
            disp('Berikut adalah hasil 6 iterasi terakhir:'),
            disp(num2str(hasil(iterasi-4:iterasi+1,:),18));
            error('Cobalah ulangi, dengan menambah maksimum iterasi! ')
        end
  end
end
```

B. Program Iterasi Newton Termodifikasi untuk Akar Ganda

```
function hasil = mnrsym(f,m,x0,delta,N,tabel)
%-----------------------------------------------------------------------
% mnrsym.m (Modified Newton-Raphson) ditulis oleh Sahid (c) 2002-3
% Iterasi  Newton-Raphson termodifikasi untuk akar berderajad m dari f(x)=0
%                 m*f(x_n)
% x_{n+1} = x_n - --------, n= 0, 1, 2, ...
%                 f'(x_n)
% Contoh-contoh pemakaian:
%   mnrsym('(x-1)^3*(3*x+2)',3,x0,delta,epsilon,N,1)
```

```
%   hasil = mnrsym('cos(x)',2,0.1,delta,N);
%   f='cos(x)'; mnrsym(f,2,1,1e-15,50);
%   syms x;f=(x-1)*(exp(x-1)-1); mnrsym(f,2,1,1e-15,50);
%   mnrsym('x^2-4*x+4',2);
% Input:
%   f        : ekspresi atau variabel simbolik yang mendefinisikan f(x)
%   m        : derajad akar yang dicari
%   x0       : hampiran awal
%   delta    : batas toleransi kekonvergenan hampiran r
%   N        : maksimum iterasi
%   tabel    : format tampilan hasil (1=pakai tab -> tabel pada MS Word),
%              (tidak dipakai = dalam bentuk tabel)
% Output:
%   hasil      -> matriks penyimpan hasil-hasil iterasi, dengan kolom:
%   1: iterasi -> nomor urut iterasi
%   2: x       -> nilai-nilai hampiran
%   3: fx      -> nilai-nilai f(x)
%   4: galatx  -> selisih dua hampiran berturut-turut = x_n - x_{n-1}
%   5: E_n     -> galat hampiran ke-n
%-----------------------------------------------------------------------
if nargin<=1 error('Anda harus menuliskan fungsi dan derajad akarnya!');
   else
    if (isvarname(f)) % cek format masukan fungsi
       help nrsym;    % Tampilkan petunjuk jika masukan berupa nama fungsi!
       error('Perhatikan petunjuk di atas!') % Program terhenti!
    end
    if m<=0|fix(m)~=m error('Salah menuliskan derajad akar!'); end
    if nargin<3, x0=0; delta=1e-15; N=50;      % Set nilai-nilai parameter
       else if nargin<4,   delta=1e-15; N=50;  % jika tidak diberikan
            else if nargin<5, N=50;
end;end;end;end
df=diff(f);        % hitung fungsi turunan ( f')
y1=subs(f,x0-2);y2=subs(f,x0+2);
ymin=-min(5,min(abs(y1),abs(y2)));
ymax=min(25,max(abs(y1),abs(y2)));
ezplot(df,[x0-2,x0+2]);grid on;hold on
% plot f'(x) dengan garis putus-putus
set(findobj(gca,'Type','line','Color',[0 0 1]),'lineStyle',':')
ezplot(f,[x0-2,x0+2]); hold off;    % plot f(x) dengan garis mulus
set(gca,'YLim',[ymin ymax])         % set batas-batas y yang sesuai
iterasi=0;
dx=x0;
fx= subs(f,x0);   % hitung f(x0)
hasil=[iterasi,x0,fx,dx];
for k=1:N,
  df0 = subs(df,x0);  % hitung nilai f'(x0)
  if df0==0,        % iterasi harus dihentikan jika f'(x0)=0
    if k>5, disp(num2str(hasil(k-5:k,:),17));
    else disp(num2str(hasil,18));end
   error(['Stop, bertemu garis singgung mendatar di x =
',num2str(x0),'!']);
    else  dx = m*fx/df0;
  end
  x = x0 - dx;        % hampiran berikutnya, x
  fx = subs(f,x);     % hitung f(x)
  err = abs(dx);      % beda dengan hampiran sebelumnya
  relerr = err/(abs(x)+eps);   % hampiran galat relatif
  hasil=[hasil;[k,x,fx,dx]];   % simpan hasilnya
  x0=x;
  iterasi=k;
  if ((err<delta|relerr<delta)& abs(fx)<delta)|fx==0,
```

```
    % iterasi konvergen -> tambahkan kolom r-x_n
    disp('Iterasi konvergen dengan hasil sebagai berikut:');
    r=hasil(iterasi+1,2);       % akar yang diperoleh
    hasil(:,5)=r-hasil(:,2);    % kolom galat hampiran
    if (nargin==6 & tabel==1),  % tampilkan hasil dengan pemisah kolom TAB
        hasil=sprintf('%d\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\t%0.15g\n',hasil');
    else
    disp(num2str(hasil,18));    % atau tampilkan hasil dengan format tabel
    end
    break
    else if iterasi==N, disp('Iterasi mungkin tidak konvergen!'),
            disp('Berikut adalah hasil 6 iterasi terakhir:'),
            disp(num2str(hasil(iterasi-4:iterasi+1,:),18));
            error('Cobalah ulangi, dengan menambah maksimum iterasi! ')
        end
    end
end
```