

Kombinatorik: Prinsip Dasar dan Teknik

Drs. Sahid, MSc.
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
sahidyk@gmail.com

March 27, 2009

1 Aturan Penjumlahan (Aturan *Disjungtif*)

Jika untuk melakukan A dapat dikerjakan dengan n cara dan untuk melakukan B dapat dikerjakan dengan m cara, sedangkan A dan B tidak dapat dikerjakan bersama-sama, maka A atau B dapat dikerjakan dengan n + m cara.

Artinya, jika Anda mempunyai dua kasus yang mungkin terjadi namun tak mungkin terjadi bersamaan, maka jumlahkan. Jika Anda hanya dapat melakukan salah satu hal atau hal yang lain saja, maka jumlahkan.

Secara lebih teoritis, jika Anda mempunyai n himpunan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ yang tidak saling beririsan satu dengan lainnya, maka cacah anggota semua himpunan sama dengan jumlah anggota masing-masing himpunan, yakni:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \implies \left| \bigcup A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|. \quad (1)$$

Notasi $|A|$ menyatakan banyaknya anggota A .

Contoh-contoh:

1. Ada berapa cara memilih seorang siswa dari dalam kelas yang terdiri atas 20 siswa laki-laki dan 25 siswa perempuan?

Jawab: $20 + 25 = 45$ cara.

2. Di kota A terdapat 5 restoran Padang, 3 restoran cepat saji ala Amerika, 6 warung Tegal. Ada berapa pilihan tempat makan?

Jawab: $5 + 3 + 6 = 14$ pilihan tempat makan

3. Dari Jakarta ke Medan hanya terdapat 5 maskapai penerbangan, 3 maskapai pelayaran, dan 4 armada bus. Ada berapa cara pergi ke Medan dari Jakarta dengan kendaraan umum?

Jawa: $5 + 3 + 4 = 12$ pilihan kendaraan umum

4. (**Tidak berlaku aturan penjumlahan**) Berapakah banyaknya bilangan prima atau bilangan asli genap yang lebih kecil daripada 10?

Jawab: Bilangan prima yang lebih kecil daripada 10 adalah: 2, 3, 5, 7 (ada 4 buah). Bilangan asli genap yang lebih kecil daripada 10 adalah 2, 4, 6, 8 (ada 4). Karena 2 adalah bilangan prima genap, maka banyaknya bilangan prima atau genap yang lebih kecil daripada 10 adalah $4 + 4 - 1 = 7$ buah.

2 Aturan Perkalian (*Aturan Sekuensial*)

Jika untuk melakukan A dapat dikerjakan dengan n cara dan untuk melakukan B dapat dikerjakan dengan m cara yang **tidak tergantung** pada bagaimana A dikerjakan, maka untuk mengerjakan A dan B dapat dilakukan dengan $n \times m$ cara.

Secara teoritis, banyaknya anggota himpunan hasil kali Cartesius n himpunan sama dengan hasil kali banyaknya anggota setiap himpunan, yakni:

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\} \implies \left| \prod_{i=1}^n A_i \right| = \prod_{i=1}^n |A_i|. \quad (2)$$

Salah satu kelas masalah yang menggunakan aturan perkalian menyangkut *string* (susunan huruf dan/atau angka) seperti nomor kendaraan bermotor, kombinasi kunci, kata, angka. Kelompok masalah perkalian yang lain menyangkut pengambilan objek dari sekumpulan objek dengan kategori yang berbeda-beda.

Contoh-contoh:

1. Dari kota A terdapat tiga jalur ke kota B dan dari kota B terdapat lima jalur ke kota C. Ada berapa jalur dari kota A ke kota C melalui kota B?

Jawab: $3 \times 5 = 15$ jalur

2. Ada berapa cara memilih seorang siswa laki-laki dan seorang siswa perempuan dari suatu kelas yang terdiri atas 15 siswa dan 20 siswi?

Jawab: $15 \times 20 = 300$ cara. Bayangkan Anda membuat tabel untuk memasangkan seorang siswa dan seorang siswi, misalkan nama-nama siswa disusun pada baris dan kolom untuk menuliskan nama-nama siswi. Tabel yang Anda buat akan memuat $15 \times 20 = 300$ sel yang menunjukkan pasangan siswa pada baris dan siswi pada kolom yang terkait.

3. Ada berapa plat nomor kendaraan di Jakarta yang dapat dibuat dengan menggunakan 4 angka dan 2 huruf di belakangnya?

Jawab: Empat angka dalam plat nomor kendaraan biasanya tidak dimulai dengan angka 0 dan dua huruf di belakangnya boleh sama. Jadi ada $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$ nomor kendaraan yang dapat dibuat.

4. Ada berapa bilangan ribuan genap?

Jawab: Bilangan ribuan terdiri atas 4 angka dengan angka pertama bukan nol. Bilangan genap memiliki angka satuan (angka terakhir) 0, 2, 4, 6, atau 8. Jadi, terdapat 9 pilihan untuk angka ribuan, 10 pilihan untuk angka ratusan, 10 pilihan angka puluhan, dan 5 pilihan untuk angka satuan, sehingga banyaknya bilangan ribuan genap adalah $9 \times 10 \times 10 \times 5 = 4500$.

5. Ada berapa nomor kunci kombinasi yang menggunakan 4 angka?
Jawab: Kunci kombinasi dapat menggunakan semua digit dari 0 sampai 9. Jadi banyaknya nomor kunci kombinasi adalah $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$.
6. Ada berapa cara untuk membentuk tim bola voli putra yang diambil wakil-wakil kelas A, B, C, D, E , dan F , masing-masing 1 anak, jika banyaknya siswa laki-laki di kelas A adalah 15, kelas B 10, kelas C 13, kelas D 9, kelas E 11 dan kelas F 12?
Jawab: $15 \times 10 \times 13 \times 9 \times 11 \times 12$. Perhatikan di sini Anda jangan terkecoh untuk menggunakan aturan penjumlahan.
7. Ada berapa cara meletakkan 5 pasang sepatu ke dalam 5 kotak penyimpanan yang masing-masing hanya dapat memuat sepasang sepatu?
Jawab: Bayangkan kotaknya diberi nomor 1,2,3,4,5. Sepatu pertama dapat dimasukkan ke salah satu dari 5 kotak yang masih kosong, sepatu kedua dapat dimasukkan ke dalam salah satu dari 4 kotak sisanya, dan seterusnya sampai semua dimasukkan. Jadi banyaknya cara adalah $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Masalah ini juga merupakan masalah permutasi.
8. Berapakah banyaknya faktor positif bilangan 600, termasuk 1 dan 600?
Jawab: Pertama kita lakukan faktorisasi prima terhadap bilangan tersebut, yakni $600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$. Ini berarti setiap faktor positif 600 haruslah berbentuk $2^a \times 3^b \times 5^c$ dengan $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$, dan $c \in \{0, 1, 2\}$. Jadi, semuanya ada $4 \times 2 \times 3 = 24$ faktor positif.
9. Berapakah banyaknya bilangan biner yang menggunakan paling banyak n bit?
Jawab: Bilangan biner (basis 2) hanya menggunakan angka 0 dan 1. Jadi, banyaknya bilangan biner yang menggunakan paling banyak n bit (**digit biner**) adalah 2^n .

Catatan:

- ▷ Dari contoh nomor 7 di atas, kita dapat menggunakan aturan perkalian untuk memperoleh hasil umum sebagai berikut. Apabila $n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \dots \times p_r^{k_r}$ adalah faktorisasi prima bilangan asli n , maka banyaknya faktor positif n adalah $(k_1 + 1) \times (k_2 + 1) \times \dots \times (k_r + 1)$.
- ▷ Suatu bilangan cacah yang ditulis dalam bentuk $d_1d_2d_3\dots d_n$ dengan $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, (b - 1)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ disebut **bilangan cacah dalam basis b dan mempunyai n digit**. (Untuk $b = 2$ digitnya sering disebut *bit*, singkatan *binary digit* atau digit biner. Untuk basis selain 2, digitnya biasa disebut *angka*, seperti *angka desimal* untuk basis 10.) Dari contoh-contoh sebelumnya Anda sudah tahu bahwa banyaknya bilangan cacah dalam basis b yang memuat n digit (termasuk digit 0 ditulis di depan) adalah $\underbrace{b \times b \times \dots \times b}_{n \text{ kali}} = b^n$. Ini sama dengan banyaknya bilangan cacah dalam basis b yang tidak lebih besar daripada $\underbrace{aaa\dots a}_{n \text{ digit}}$ dengan $a = b - 1$.

Contoh-contoh:

1. Banyaknya bilangan biner yang tidak lebih besar daripada 111_2 adalah $2^3 = 8$, yakni 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
2. Berapakah banyaknya bilangan biner 6 bit yang dimulai dengan 11 atau 000?
Jawab: Terdapat 2^4 bilangan biner 6 bit yang dimulai 11 dan 2^3 bilangan biner 6 bit yang dimulai dengan 000. Karena tidak mungkin sebuah bilangan biner dimulai dengan 11 dan 000 sekaligus, maka jawabannya adalah $2^4 + 2^3 = 3 \times 2^3 = 24$.
3. Berapakah banyaknya bilangan biner 6 bit yang dimulai dengan 11 atau berakhir dengan 00?
Jawab: Seperti sebelumnya, terdapat 2^4 bilangan biner 6 bit yang dimulai dengan 11 dan terdapat 2^4 bilangan biner 6 bit yang berakhir dengan 00. Akan tetapi, terdapat 2^2 biner 6 bit yang dimulai dengan 11 dan diakhiri dengan 00 (karena 2 bit yang tengah bebas). Karena yang 4 kasus ini dihitung 2 kali maka jawabannya adalah $2^4 + 2^4 - 2^2 = 28$.

Dua contoh terakhir menunjukkan pemakaian aturan penjumlahan dan perkalian sekaligus. Contoh terakhir menuntut pemakaian aturan penjumlahan secara lebih hati-hati, apabila terjadi kemungkinan 2 kali menghitung. Contoh berikut menunjukkan pemakaian aturan perkalian yang mengarah pada hasil umum yang selama ini mungkin sudah Anda ketahui tentang banyaknya himpunan bagian suatu himpunan berhingga.

Contoh: Misalkan diketahui himpunan $\{a, b, c\}$. Selanjutnya, pikirkan tentang suatu himpunan bagian dari himpunan tersebut dan salah satu anggota, misalnya a . Ada dua kemungkinan: (1) a adalah anggota himpunan bagian tersebut **atau** (2) a bukan anggota himpunan bagian tersebut. Tidak pernah terjadi kedua kemungkinan tersebut sekaligus. Hal ini berlaku untuk setiap himpunan bagian dan setiap a, b , dan c . Jadi, banyaknya himpunan bagian dari a, b, c adalah $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$, yakni

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Secara umum, banyaknya himpunan bagian dari himpunan yang mempunyai n anggota adalah 2^n . Anda dapat melihat hasil ini dengan penalaran lain sebagai berikut.

1. Dimulai dari \emptyset yang mempunyai $1 = 2^0$ himpunan bagian, yakni \emptyset sendiri.
2. Jika kita memasukkan 1 anggota ke himpunan tersebut, maka anggota tersebut dapat dimasukkan ke dalam himpunan bagian yang ada **atau** tidak dimasukkan ke dalam himpunan bagian yang sudah ada. Jadi, banyaknya himpunan bagian dari himpunan dengan 1 anggota adalah $2 = 2^1$.
3. Setiap kita menambahkan 1 anggota baru ke dalam sebuah himpunan, banyaknya himpunan bagian akan menjadi **dua kali** banyaknya himpunan bagian sebelumnya.
4. Jadi, jika $|A| = n$ maka banyaknya himpunan bagian dari A adalah 2^n .

Contoh:

1. Berapakah banyaknya cara memilih 3 bilangan asli yang tidak lebih besar daripada 100 sedemikian hingga bilangan pertama lebih kecil daripada bilangan kedua dan ketiga dan bilangan kedua dan ketiga boleh sama? Jelasnya, misalnya $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ dan $S = \{(a, b, c) | a, b, c \in A, a < b, a < c\}$. Pertanyaannya adalah berapakah $|S|$?

Jawab: Sesuai dengan ketentuan, a dapat dipilih di antara 1, 2, 3, ..., 99. Untuk setiap pilihan $a = k \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$, baik b maupun c dapat dipilih di antara $k + 1, k + 2, \dots, 100$. Jadi, total banyaknya pilihan adalah

$$|S| = 99^2 + 98^2 + 97^2 + \dots + 2^2 + 1^2.$$

Selanjutnya Anda dapat menghitung jumlah tersebut dengan menggunakan rumus $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, yakni $|S| = \frac{1}{6} \times 99 \times 100 \times 199 = 328350$.

2. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari himpunan $\{a, b, c, d\}$ yang memuat a ?

Jawab: $2^3 = 8$. Mengapa?

Aturan penjumlahan dan aturan perkalian mungkin tampak mengada-ada, sehingga sering Anda lupa! Akan tetapi Anda harus ingat, kedua aturan tidaklah sepele, karena semua perhitungan kombinatorik dapat diuraikan menjadi perhitungan-perhitungan sederhana yang dapat diselesaikan dengan aturan penjumlahan dan/atau aturan perkalian.

3 Permutasi (Susunan)

Permutasi adalah susunan beberapa objek yang berbeda. Perhitungan banyaknya permutasi merupakan aplikasi aturan perkalian. Terdapat beberapa kasus permutasi, yakni permutasi sebagian, permutasi lengkap (permutasi), permutasi berulang, dan permutasi melingkar. Masing-masing memerlukan analisis yang berbeda-beda untuk mengetahui banyaknya susunan. Perhitungan permutasi yang lebih rumit tidak cukup hanya didasarkan pada aturan penjumlahan dan perkalian saja, namun memerlukan konsep **kombinasi**.

3.1 Permutasi Sebagian

Misalkan A adalah himpunan yang mempunyai n anggota berbeda dan r adalah bilangan cacah yang kurang atau sama dengan n . Suatu *permutasi- r* di antara n anggota A adalah susunan terurut r anggota A atau suatu pengambilan r anggota A satu demi satu tanpa dikembalikan. Untuk membuat susunan (atau mengambil satu demi satu tanpa dikembalikan) r anggota A Anda dapat membayangkan mempunyai r kotak yang diberi label 1, 2, 3, ..., r . Selanjutnya dilakukan sebagai berikut:

1. Kotak 1 dapat diisi dengan salah satu di antara n anggota A yang ada.
2. Kotak 2 dapat diisi dengan salah satu di antara $n - 1$ anggota A yang tersisa.

3. Kota 3 dapat diisi dengan salah satu di antara $n - 2$ anggota A yang tersisa, dan seterusnya.
4. Akhirnya, kota r dapat diisi dengan salah satu di antara $n - (r - 1) = n - r + 1$ anggota A yang tersisa.

Jadi banyaknya susunan (atau pengambilan satu demi satu tanpa pengembalian) r anggota A yang mungkin adalah $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)$. Notasi $P(n, r)$ digunakan untuk menyatakan banyaknya permutasi r objek di antara n objek yang tersedia¹. Jadi,

$$P(n, r) = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1). \quad (3)$$

Contoh-contoh:

1. Banyaknya pasangan berurutan dua bilangan prima berbeda yang kurang dari 10 adalah $4 \times 3 = 12$, yakni:
(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 2), (5, 2), (7, 2), (3, 5), (3, 7), (5, 3), (7, 3), (5, 7), (7, 5).
2. Jika Anda mempunyai lima huruf A, B, C, D, E , maka banyaknya susunan tiga huruf berbeda di antara kelima huruf tersebut adalah $5 \times 4 \times 3 = 60$.
3. Banyaknya bilangan ribuan yang tidak memuat dua angka sama adalah $9 \times 9 \times 8 \times 7$.
4. Banyaknya cara membagikan 5 buah buku kepada 10 anak sehingga setiap anak menerima tidak lebih dari 1 buku adalah $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$.
5. Banyaknya cara mengambil 6 buah kelereng satu demi satu dari 10 kelereng berbeda adalah $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$.
6. Bilangan asli yang lebih kecil daripada 100 dapat dikelompokkan menjadi 2, yakni (1) mempunyai dua angka sama (11, 22, 33, ..., 99), ada 9 bilangan; dan (2) mempunyai dua angka berbeda, ada sebanyak $10 \times 9 = 90$. Jadi, banyaknya bilangan asli yang lebih kecil daripada 100 adalah $9 + 90 = 99$. Memang demikian bukan?
7. Dengan penalaran serupa nomor 6 di atas, maka tanpa mencacah Anda akan tahu bahwa banyaknya kartu dalam satu set kartu domino adalah $7 + \frac{7 \times 6}{2} = 28$. Mengapa di sini harus dibagi 2? Karena kartu domino tidak membedakan urutan, artinya kartu (2,5) sama dengan kartu (5,2).
8. Banyaknya pasangan suami-istri **monogami** yang dapat dibentuk dari 10 laki-laki dan 14 perempuan adalah $P(14, 10)$.

Catatan: Anda harus berhati-hati ketika berhadapan dengan masalah distribusi dan pengambilan, karena tidak selalu menggunakan perhitungan seperti di atas. Masalah distribusi dan pengambilan sangat tergantung pada persyaratan yang ditentukan.

¹Ada yang menuliskan dengan notasi P_r^n , tapi agar lebih mudah ditulis kita gunakan notasi $P(n, r)$.

3.2 Permutasi Lengkap (Permutasi)

Permutasi lengkap sering disebut permutasi, tanpa keterangan lebih lanjut, yakni susunan semua objek yang tersedia. Misalkan, semua permutasi yang mungkin dari tiga huruf A, B, C adalah $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$ (ada 6 permutasi berbeda). Secara umum, banyaknya permutasi n objek berbeda adalah $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$. Perkalian ini sering diberi notasi dengan $n!$ (dibaca “n faktorial”), yang didefinisikan sebagai berikut:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (n - 1)! \times n = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n - 1) \times n, & n > 0 \end{cases} \quad (4)$$

Dengan menggunakan rumus (4) dan (3) kita dapat menuliskan sebagai berikut:

$$P(n, n) = n! \quad (5)$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} \quad (6)$$

Contoh-contoh:

1. Banyaknya cara menjadwalkan 5 kegiatan jika tidak boleh ada dua kegiatan dijadwalkan dalam waktu yang sama adalah $5! = 120$.
2. Banyaknya cara menyusun 10 buah buku yang tidak ada dua buku berjudul sama pada sebuah rak adalah $10!$
3. Banyaknya *password* yang dapat dibuat dengan menggunakan kombinasi 6 huruf A, B, C, D, E , dan F adalah $2 \times 6!$ jika hanya menggunakan huruf kecil saja **atau** huruf besar saja, atau $P(12, 6) = \frac{12!}{6!}$ apabila menggunakan kombinasi huruf besar dan kecil.
4. Ada berapa cara duduk sebaris n siswa dan n siswi sehingga berselang-seling duduknya, siswa-siswi-siswa-...?

Jawab: Banyaknya cara duduk n siswa adalah $n!$ dan banyaknya cara duduk n siswi juga $n!$ Jadi, banyaknya cara duduk berselang-seling siswa-siswi adalah $(n!)^2$.

Berikut adalah beberapa rumus yang berkaitan dengan permutasi, berlaku untuk $n, r \in \mathbf{A}$ dan $r \leq n$.

$$P(n, r) = nP(n - 1, r - 1) \quad (7)$$

$$P(n, r) = (n - r + 1)P(n, r - 1) \quad (8)$$

$$P(n, r) = \frac{n}{n - r} P(n - 1, r), \quad r < n \quad (9)$$

$$P(n + 1, r) = P(n, r) + rP(n, r - 1) \quad (10)$$

$$P(n + 1, r) = r! + r[P(n, r - 1) + P(n - 1, r - 1) + \dots + P(r, r - 1)] \quad (11)$$

Berikut ditunjukkan bukti dua rumus di antaranya, sisanya silakan Anda coba buktikan sendiri.

Bukti (7):

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n \frac{(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!} = nP(n-1, r-1).$$

Bukti (9):

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!} = \frac{n}{n-r} \frac{(n-1)!}{((n-1)-r)!} = \frac{n}{n-r} P(n-1, r).$$

Sebelum membahas permutasi melingkar dan permutasi dengan pengulangan, perlu dibahas terlebih dahulu masalah kombinasi, karena kombinasi diperlukan untuk perhitungan permutasi melingkar dan permutasi dengan pengulangan.

4 Kombinasi (Himpunan Bagian)

Apabila di dalam pemilihan (pengambilan) beberapa objek kita tidak memperhatikan urutan, maka yang kita perhatikan hanyalah banyaknya objek yang kita pilih. Dengan kata lain, pengambilannya seolah-olah dilakukan sekaligus, tidak satu demi satu. Karena tidak memperhatikan urutan objek, kombinasi sebenarnya merupakan himpunan bagian. Ingat, anggota-anggota suatu himpunan tidak tergantung pada urutannya.

Jika A adalah himpunan yang mempunyai n anggota, maka *kombinasi- r* di antara anggota-anggota A adalah himpunan bagian yang mempunyai r anggota. Jadi, jika $A = \{a, b, c, d, e\}$, maka kombinasi-3 di antara anggota-anggota A adalah himpunan-himpunan bagian dengan 3 anggota, yakni:

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}.$$

Semuanya ada 6 kombinasi (himpunan bagian) 3 di antara 6 anggota A .

Pertama-tama kita akan mencari rumus banyaknya cara memilih r objek di antara n objek berbeda². Banyaknya kombinasi ini dinotasikan dengan $C(n, r)$. Untuk mendapatkan rumus $C(n, r)$ kita ingat kembali *permutasi- r* di antara n . Untuk dapat membuat susunan r di antara n objek, sebenarnya dapat dilakukan dengan dua langkah sebagai berikut:

1. Pertama-tama kita memilih r di antara n objek yang akan kita ambil. Ini dapat dilakukan dengan $C(n, r)$ cara, karena terdapat $C(n, r)$ himpunan bagian yang memuat r objek.
2. Selanjutnya, r objek yang terpilih kita susun. Di sini terdapat $r!$ susunan (permutasi) berbeda.

Jika kita melakukan langkah 1) dan 2), maka kita telah membuat permutasi r di antara n objek. Karena banyaknya permutasi demikian adalah $P(n, r)$, sedangkan menurut aturan perkalian, dari langkah 1) dan 2) kita peroleh banyaknya permutasi demikian adalah $C(n, r) \times r!$ Jadi,

$$P(n, r) = C(n, r) \times r! \text{ atau } C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}. \quad (12)$$

²Pada beberapa buku banyaknya kombinasi ditulis dengan notasi C_r^n atau $\binom{n}{r}$, tetapi di sini kita gunakan notasi $C(n, r)$ yang mudah ditulis.

Jika dijabarkan, maka diperoleh rumus untuk kombinasi, yakni:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (13)$$

Rumus di atas berlaku untuk $0 \leq r \leq n$, sedangkan untuk $r < 0$ atau $r > n$ didefinisikan $C(n, r) = 0$.

Contoh-contoh:

1. Banyaknya cara memilih 5 orang di antara 30 orang adalah $C(30, 5) = \frac{30!}{25!5!} = \frac{26 \times 27 \times 28 \times 29 \times 30}{5!} = 26 \times 27 \times 7 \times 29$.
2. Banyaknya cara memilih 5 kartu dari 1 set kartu remi yang terdiri atas 52 kartu adalah $C(52, 5) = 52!/47!5!$
3. Banyaknya cara memilih 2 kartu **As** di antara empat kartu **As** dalam 1 set kartu remi adalah $C(4, 2) = 6$.
4. Banyaknya cara memilih 5 kartu selain **As** adalah $C(52 - 4, 5) = C(48, 5)$.
5. Banyaknya jabat tangan yang dapat dilakukan oleh n orang adalah $C(n, 2) = \frac{n(n-1)}{2}$, karena setiap jabat tangan dilakukan oleh dua orang.
6. Berapakah banyaknya bilangan biner yang menggunakan paling banyak 5 bit dan tepat mempunyai dua bit 1?
Jawab: Karena 2 tempat harus digunakan untuk bit 1, maka tinggal 3 tempat untuk bit 0. Jadi, banyaknya bilangan yang ditanyakan sama saja banyaknya cara memilih 2 tempat di antara 5 tempat, yakni $C(5, 2) = 5!/3!2! = 10$. Bilangan-bilangannya adalah 11, 110, 101, 1100, 1010, 1001, 11000, 10100, 10010, 10001.
7. Berapakah banyaknya bilangan biner yang menggunakan paling banyak 5 bit dan mempunyai paling sedikit dua bit 1?
Jawab: Berarti, bilangan-bilangan tersebut dapat mempunyai 2, 3, 4, atau 5 bit 1. Dengan menggunakan aturan penjumlahan diperoleh semua ada $C(5, 2) + C(5, 3) + C(5, 4) + C(5, 5) = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$ bilangan biner yang dimaksud.
8. Berapakah banyaknya bilangan biner yang menggunakan paling banyak 4 bit dan mempunyai paling banyak tiga bit 1?
Jawab: Anda dapat menggunakan pola pikir seperti contoh sebelumnya, artinya bilangan-bilangan dapat mempunyai 0, 1, 2, atau 3 bit 1. Jadi, semuanya ada $C(4, 0) + C(4, 1) + C(4, 2) + C(4, 3) = 1 + 4 + 6 + 4 = 15$ bilangan biner yang dimaksud. Cara berpikir lain adalah sebagai berikut: Total terdapat $2^4=16$ bilangan biner yang menggunakan paling banyak 4 bit. Di antaranya hanya 1 bilangan yang menggunakan lebih dari tiga bit 1, yakni 1111. Jadi, jawabnya adalah $16 - 1 = 15$.
9. Berapakah banyaknya bilangan biner yang menggunakan paling banyak 5 bit dan tidak memuat tepat tiga bit 1?
Jawab: $2^5 - C(5, 3)$. Mengapa?

5 Permutasi Melingkar

Misalkan Anda mempunyai himpunan $\{a, b, c, d\}$. Banyaknya permutasi empat objek tersebut adalah $4! = 24$, yakni:

$abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb,$
 $bacd, badc, bcad, bcda, bdac, ndca,$
 $cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba,$
 $dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba.$

Sekarang bayangkan apabila keempat objek tersebut disusun melingkar. Anda tentu tidak dapat membedakan antara permutasi-permutasi:

1. $abcd, bcda, cdab, dabc$;
2. $abdc, bdca, dcab, cabd$;
3. $acbd, cbda, bdac, dacb$;
4. $acdb, cdba, dbac, bacd$;
5. $adbc, dbca, bcad, cadb$;
6. $adcb, dcba, cbad, badc$.

Jadi dalam permutasi melingkar, sekarang hanya terdapat 6 permutasi yang berbeda, karena dari 24 permutasi baris dapat dikelompokkan empat-empat permutasi yang masing-masing menyajikan permutasi melingkar yang sama.

Dengan demikian, banyaknya permutasi melingkar dengan n objek berbeda adalah sama dengan banyaknya permutasi baris $(n - 1)$ objek berbeda, yakni $(n - 1)!$. Banyaknya permutasi melingkar r di antara n objek berbeda sering disimbolkan dengan $Q(n, r)$. Dengan menggunakan penalaran-penalaran yang sudah dijelaskan sebelumnya, Anda seharusnya sudah tahu bahwa:

$$Q(n, r) = C(n, r) \times (r - 1)! = \frac{n!}{(n - r)!r}, \text{ atau}$$
$$Q(n, r) = \frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{(n - r)!r} \quad (14)$$

Contoh-contoh:

1. Banyaknya cara duduk mengelilingi sebuah meja bundar n orang adalah $(n - 1)!$
2. Banyaknya kalung berbeda pola yang dapat dibuat dengan menggunakan 10 buah manik-manik berbeda adalah $\frac{1}{2} \times 9!$. Mengapa bukan $9!$? Karena kalung yang sama tampak berpola lain jika dilihat dari sisi yang lain. Jelasnya, pola kalung seperti $a - b - c - d - e$ sama dengan pola $e - d - c - b - a$.
3. Ada berapa cara 5 anak laki-laki dan 3 anak perempuan duduk mengelilingi sebuah meja jika

- (a) tidak ada pembatasan?
- (b) ada 1 anak laki-laki dan 1 anak perempuan yang tidak boleh duduk berdekatan?
- (c) tidak boleh ada anak perempuan yang duduk berdekatan?

Jawab:

- (a) Jika tidak ada pembatasan, ada $(5 + 3 - 1)! = 7!$ cara duduk.
 - (b) Misalkan anak laki-laki L_1 tidak boleh berdekatan dengan anak perempuan P_1 . Lima anak laki-laki dan 2 anak perempuan selain P_1 dapat duduk melingkar dengan $6!$ cara. Di antara 7 anak yang sudah duduk, terdapat $7 - 2 = 5$ posisi untuk dapat ditempati P_1 , karena P_1 tidak boleh duduk di samping kiri atau kanan L_1 . Jadi jawabnya adalah $5 \times 6! = 3600$. Anda dapat menggunakan penalaran lain begini. Jika L_1 dan P_1 harus duduk bersebelahan, maka banyaknya cara duduk adalah $2 \times 6!$, karena P_1 dapat duduk di sebelah kiri atau kanan L_1 . Jadi, jika L_1 dan P_1 tidak boleh berdekatan, banyaknya cara duduk menjadi $7! - 2 \times 6! = 6! \times (7 - 2) = 6! \times 5 = 3600$.
 - (c) Pertama, 5 anak laki-laki dapat duduk melingkar dengan $4!$ cara. Setelah 5 anak laki-laki duduk melingkar, setiap anak perempuan dapat duduk di antara anak laki-laki. Karena terdapat 5 posisi antar anak laki-laki, maka ketiga anak perempuan dapat menempati posisi antar laki-laki dengan $5 \times 4 \times 3$ cara. Jadi total terdapat $4! \times 5 \times 4 \times 3$ cara duduk demikian.
4. Ada berapa cara n pasang suami-istri duduk mengelilingi sebuah meja jika
- (a) laki-laki dan perempuan duduk berselang-seling?
 - (b) setiap suami-istri duduk bersebelahan?

Jawab:

- (a) Pertama, n laki-laki dapat duduk melingkar dengan $(n - 1)!$ cara. Selanjutnya, n perempuan dapat menempati n tempat duduk antar laki-laki dengan $n!$ cara. Jadi total terdapat $(n - 1)! \times n!$ cara duduk demikian.
- (b) Pertama-tama, bayangkan setiap pasang suami-istri dianggap 1 objek. Jadi terdapat $(n - 1)!$ cara duduk melingkar n pasangan suami-istri. Akan tetapi, setiap pasangan suami-istri dapat duduk bersebelahan dengan pasangan dengan 2 cara (suami di sebelah kiri istri atau sebaliknya). Karena ada n pasangan, maka total terdapat $(n - 1)! \times 2^n$ cara duduk demikian.

Catatan:

Jika pertanyaannya menjadi laki-laki dan perempuan duduk berselang-seling tetapi tidak berdekatan dengan pasangannya, maka jawabnya tidak sesederhana jawaban di atas. Masalah ini dikenal dengan masalah *menages*, pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Perancis Edward Anatole Lucas (1842 - 1891). Anda mau mencoba menjawabnya?

Peringatan:

Anda harus dapat membedakan suatu masalah apakah merupakan masalah permutasi atau kombinasi. Selanjutnya, jika mungkin apakah Anda dapat menguraikan masalah tersebut menjadi masalah yang dapat diselesaikan dengan aturan penjumlahan dan/atau aturan perkalian.

6 Teorema Binomial

6.1 Rumus-rumus dasar kombinasi

Berikut adalah beberapa rumus yang terkait dengan kombinasi. Beberapa rumus mungkin harus dihafal, yang lain tidak perlu, yang penting dapat memberikan penjelasan atau penalaran jika harus diperlukan dalam perhitungan.

$$C(n, 0) = 1 \quad \text{dan} \quad C(n, n) = 1 \quad (15)$$

$$C(n, r) = C(n, n - r) \quad (16)$$

$$C(n, r) = \frac{n}{r} \times C(n - 1, r - 1), \quad r > 0 \quad (17)$$

$$C(n, r) = \frac{n - r + 1}{r} \times C(n, r - 1), \quad r > 0 \quad (18)$$

$$C(n, r) = C(n - 1, r - 1) + C(n - 1, r) \quad (19)$$

$$\sum_{k=0}^r C(n + k, k) = C(n + r + 1, r) \quad (20)$$

$$C(n, m) \times C(m, kr) = C(n, r) \times C(n - m, m - r) \quad (21)$$

Pembuktian rumus-rumus kombinasi dapat dilakukan dengan dua cara. Cara pertama adalah secara aljabar, yakni dengan menguraikan rumus-rumus yang sudah diketahui. Cara kedua dikenal dengan istilah *bukti kombinatorik*, yakni menggunakan penalaran atau memecah masalahnya menjadi masalah yang dapat diselesaikan dengan aturan penjumlahan dan/atau aturan perkalian. Berikut ini ditunjukkan bukti beberapa rumus di atas. Rumus-rumus yang tidak dibuktikan silakan Anda buktikan sendiri!

Bukti (16):

Bukti aljabar. Bukti aljabar terkadang dapat dilakukan secara langsung dari rumus-rumus yang sudah diketahui sebelumnya. Perhatikan,

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!r!} = \frac{n!}{(n - (n - r))!(n - r)!} = C(n, n - r). \blacksquare$$

Bukti kombinatorik. Perhatikan, misalkan tersedia n objek berbeda dan Anda harus memilih r objek di antaranya. Setelah Anda memilih r objek, $(n - r)$ sisanya pasti sudah tertentu. Artinya, memilih r objek pada hakekatnya sama dengan memilih $(n - r)$ objek. Dengan demikian, $C(n, r) = C(n, n - r)$. ■

Bukti (19):

Rumus ini dikenal dengan identitas **Pascal**, karena hasilnya berupa bilangan-bilangan (lebih tepatnya koefisien-koefisien binomial) yang tersusun dalam bentuk segitiga Pascal.

Bukti aljabar. Kita dapat menguraikan ruas kanan untuk mendapatkan ruas kiri seba-

gai berikut:

$$\begin{aligned}
 C(n-1, r-1) + C(n-1, r) &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!} \left[\frac{1}{(n-r)} + \frac{1}{r} \right] \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!} \left[\frac{n}{(n-r)r} \right] \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n, r). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Bukti kombinatorik. Bayangkan Anda akan memilih r objek di antara n objek berbeda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Anda dapat melakukan pemilihan ini dengan dua cara.

Cara pertama: Mula-mula Anda pilih a_1 . Selanjutnya Anda tinggal memilih $r-1$ objek di antara $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$. Cara pertama ini dapat dilakukan dengan $1 \times C(n-1, r-1)$ cara.

Cara kedua: Mula-mula Anda sisihkan a_1 untuk tidak dipilih. Dengan demikian langkah selanjutnya Anda masih harus memilih r objek di antara $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$. Cara kedua ini dapat dilakukan dengan $1 \times C(n-1, r)$ cara.

Berdasarkan aturan penjumlahan, maka diperoleh $C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$. ■

6.2 Segitiga Pascal

Dengan menggunakan rumus (19) untuk n, r bilangan-bilangan cacah dengan $0 \leq r \leq n$ akan diperoleh pola bilangan yang dikenal dengan nama **segitiga Pascal**, seperti terlihat pada (22).

	0	1	2	3	4	r	5	6	7	8	9	...
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
n 5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
\vdots	\vdots											\ddots

Apabila dituliskan dalam notasi kombinasi, segitiga Pascal terlihat seperti (23).

$$\begin{array}{cccccccc}
 C(0,0) & & & & & & & \\
 C(1,0) & C(1,1) & & & & & & \\
 C(2,0) & C(2,1) & C(2,2) & & & & & \\
 C(3,0) & C(3,1) & C(3,2) & C(3,3) & & & & \\
 C(4,0) & C(4,1) & C(4,2) & C(4,3) & C(4,4) & & & \\
 C(5,0) & C(5,1) & C(5,2) & C(5,3) & C(5,4) & C(5,5) & & \\
 C(6,0) & C(6,1) & C(6,2) & C(6,3) & C(6,4) & C(6,5) & C(6,6) & \\
 C(7,0) & C(7,1) & C(7,2) & C(7,3) & C(7,4) & C(7,5) & C(7,6) & C(7,7) \\
 C(8,0) & C(8,1) & C(8,2) & C(8,3) & C(8,4) & C(8,5) & C(8,6) & C(8,7) & C(8,8) \\
 \vdots & & & & & & & & \ddots
 \end{array} \tag{23}$$

Dengan mengamati jumlah bilangan-bilangan dalam setiap baris segitiga Pascal, kita dapat memperoleh rumus penting, yakni

$$\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n. \tag{24}$$

Ada banyak cara membuktikan kebenaran rumus (24), seperti cara-cara yang sudah dicontohkan sebelumnya, atau dengan induksi matematika. Rumus tersebut juga dapat diperoleh dengan menerapkan teorema binomial yang akan dibahas berikut ini.

6.3 Koefisien-koefisien binomial

Pertama-tama kita akan menggunakan rumus kombinasi untuk menentukan koefisien-koefisien ekspansi binomial seperti $(3x + 5)^7$, tanpa perlu mengekspansinya. Ingat kembali rumus-rumus yang sudah Anda kenal:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \\
 (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{aligned}$$

Salah satu cara memandang perpangkatan seperti ini adalah sebagai berikut. Untuk menjabarkan $(a + b)^3$, sesuai dengan definisi perpangkatan bulat, kalikan $(a + b)(a + b)(a + b)$ dengan memilih a atau b dari setiap faktor. Hasil ekspansi diperoleh dengan menjumlahkan semua kemungkinan mengalikan tiga faktor (masing-masing a atau b), seperti disajikan pada tabel di bawah ini.

	Faktor yang dipilih							
$(a + b)$	a	a	a	b	a	b	b	b
$(a + b)$	a	a	b	a	b	a	b	b
$(a + b)$	a	b	a	a	b	b	a	b
Hasil kali	a^3	a^2b	a^2b	a^2b	ab^2	ab^2	ab^2	b^3
Jumlah	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$							

Perhatikan, oleh karena setiap suku merupakan hasil kali tiga faktor, maka jumlah pangkat pada setiap faktor adalah 3. Koefisien pada setiap faktor adalah banyaknya

cara memilih a (atau b) dari tiga faktor " $(a + b)$ ". Misalnya, koefisien a^2b sama dengan banyaknya cara memilih 2 a dari tiga faktor yang dikalikan, yakni $C(3, 2) = 3$, seperti ditunjukkan pada tabel di atas. Dengan memeriksa semua kemungkinan, diperoleh

$$(a + b)^3 = C(3, 3)a^3 + C(3, 2)a^2b + C(3, 1)ab^2 + C(3, 0)b^3.$$

Secara umum kita peroleh **teorema binomial** sebagai berikut:

$$(a + b)^n = C(n, 0)a^n b^0 + C(n, 1)a^{n-1}b^1 + C(n, 2)a^{n-2}b^2 + \dots + C(n, n)a^0 b^{n-0} \quad (25)$$

$$= \sum_{k=0}^n C(n, k)a^{n-k}b^k. \quad (26)$$

Perhatikan, koefisien-koefisien pada suku-suku binomial tidak lain adalah suatu baris pada segitiga Pascal.

Rumus (25) berlaku untuk segala substitusi nilai a dan b . Sebagai contoh, apabila $a = b = 1$ maka diperoleh hasil yang sudah kita duga sebelumnya:

$$2^n = (1 + 1)^n = C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n).$$

Apabila $a = 1$ dan $b = -1$ maka diperoleh:

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C(n, k) = C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \dots + (-1)^n C(n, n).$$

Contoh-contoh:

1. Berapakah koefisien x^3 pada ekspansi $(x + 1)^5$?

Jawab: Anda dapat menggunakan teorema binomial untuk $a = x$ dan $b = 1$, $(x + 1)^5 = \sum_{k=0}^5 C(5, k)x^{5-k} \times 1^k$. Jadi jawabnya adalah $C(5, 2) = C(5, 3) = 10$.

2. Berapakah koefisien x^3 pada ekspansi $(x + 2)^5$?

Jawab: $(x + 2)^5 = \sum_{k=0}^5 C(5, k)x^{5-k} \times 2^k$. Jadi, koefisien x^3 adalah $C(5, 2) \times 2^2 = 40$.

3. Berapakah koefisien x^5 pada ekspansi $(3x + 5)^7$?

Jawab: $(3x + 5)^7 = \sum_{k=0}^7 C(7, k)(3x)^{7-k} \times 5^k$. Jadi, koefisien x^5 adalah $C(7, 2) \times 3^5 \times 5^2$.

4. Tunjukkan bahwa $C(n, k) < C(n, k + 1)$ jika dan hanya jika $k < \frac{n-1}{2}$.

Bukti:

$$C(n, k) < C(n, k + 1)$$

$$\iff \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\iff \frac{1}{k!(n-k)!} < \frac{1}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\iff (k + 1)!(n - k - 1)! < k!(n - k)!$$

$$\iff (k + 1) < (n - k)$$

$$\iff 2k < n - 1$$

$$\iff k < \frac{n-1}{2}. \quad \blacksquare$$

rumus kombinasi

kedua ruas dibagi dengan $n!$

kedua ruas dibagi dengan $k!(n - k - 1)!$