MATERI KULIAH

a_1

Kalkulus Lanjut

BARISAN DAN DERET TAK BERHINGGA

Sahid, MSc.

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2010

BARISAN DAN DERET DI SMA:
BARISAN & DERET ARITMETIKA DAN GEOMETRI

A. Kompetensi yang diharapkan

1. Menentukan suku ke-n (atau pola) suatu barisan bilangan
2. Menentukan suku ke-n suatu barisan aritmatika dan jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika
3. Menentukan suku ke-n suatu barisan geometri dan jumlah n suku pertama suatu deret geometri
4. Menghitung jumlah deret geometri tak hingga
5. Menuliskan suatu deret aritmetika dan suatu deret geometri dengan notasi sigma
6. Menyelesaikan masalah matematika yang berkaitan dengan barisan dan deret

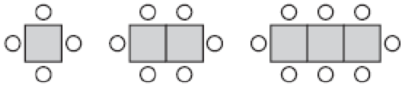
B. Indikator

1. Menentukan pola atau rumus suku ke-n suatu barisan bilangan
2. Menjelaskan pengertian suatu barisan bilangan
3. Menjelaskan cara-cara menuliskan suatu barisan bilangan
4. Menjelaskan pengertian barisan aritmetika dan barisan geometri
5. Menentukan rumus suku ke-n suatu barisan aritmetika
6. Menentukan rumus suku ke-n suatu barisan geometri
7. Menjelaskan pengertian suatu deret bilangan
8. Menuliskan deret aritmetika dan deret geometri dengan notasi sigma
9. Menentukan rumus jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika
10. Menentukan rumus jumlah n suku pertama suatu deret geometri
11. Menghitung jumlah deret geometri tak hingga yang konvergen
12. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan barisan dan deret.

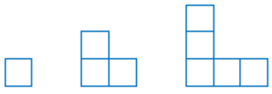
C. Pola Bilangan dan Barisan Bilangan

Untuk membahas tentang barisan dan deret bilangan kita mulai dengan permasalahan-permasalahan sebagai berikut.

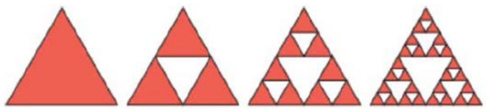
1. Menata tempat duduk. Di sekeliling sebuah meja persegi dapat ditem-patkan empat kursi. Di sekeliling dua meja persegi yang dijajarkan merapat dapat ditempatkan enam kursi, dan seterusnya seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Ada berapa kursi yang dapat ditata jika terdapat 10 meja?



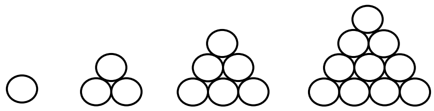
2. Perhatikan pola pada gambar di bawah ini yang masing-masing disusun dengan meng-gunakan beberapa persegi berukuran $1 \times 1\ cm^2$. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, pada gambar ke berapakah yang mempu-nyai keliling 40 cm?



3. Perhatikan pola geometri di bawah ini. Apabila pola tersebut dilanjut-kan tanpa berakhir akan dihasilkan sebuah *fraktal* yang disebut segitiga Sierpinski. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, terdapat berapa segi-tiga berwarna pada gambar ke-10?



4. Berikut adalah gambar beberapa lingkaran yang disusun dengan mengi-kuti pola tertentu. Apabila gambar tersebut dilanjutkan, berapakah banyaknya lingkaran pada gambar ke-10?



Marilah kita bahas satu per satu permasalahan-permasalahan di atas. Untuk menjawab setiap masalah, kita dapat membuat tabel yang sesuai.

1. Untuk masalah pertama, kita buat tabel sebagai berikut.

Banyaknya meja	1	2	3	...	n
Banyaknya kursi	4	6=2x2+2	8=2x3+2	...	$2 \times n + 2$

Dengan memperhatikan pola susunan meja dan kursi, ternyata terdapat hubungan antara banyaknya meja dan banyaknya kursi, yakni jika terdapat n meja, maka terdapat $2 \times n + 2$ kursi. Jadi, jika terdapat 10 meja, maka terdapat 22 kursi.

2. Untuk masalah kedua juga kita buat tabel sebagai berikut.

Gambar ke	1	2	3	...	n
Banyaknya persegi	1	3	5	...	$2n - 1$
Keliling bangun	4=4x1	8=4x3-2x2	12=4x5-2x4		$4 \times (2n - 1) - 2 \times (2n - 2)$

Dengan memperhatikan pola gambar dan tabel di atas, dapat disimpulkan bahwa keliling gambar ke-n adalah $4 \times (2n - 1) - 2 \times (2n - 2) = 4n$. Jadi, bangun yang mempunyai keliling 40 adalah gambar ke-10.

Catatan: *Perhitungan keliling di atas diperoleh dari menjumlahkan keliling semua persegi dikurangi panjang sisi-sisi yang tidak dihitung. Anda mungkin dapat langsung menyim-pulkan rumus keliling bangun dengan memperhatikan pola bilangan pada baris ketiga pada tabel di atas.*

3. Lagi-lagi, untuk menyelesaikan soal nomor tiga kita juga dapat membuat tabel sebagai berikut.

Gambar ke	1	2	3	4	...	n
Banyaknya setitiga berwarna	1= 3^0	3= 3^1	9= 3^2	27= 3^3	...	3^{n-1}

Perhatikan bahwa bilangan-bilangan pada baris kedua membentuk suatu pola tertentu, yakni pada gambar ke-n banyaknya segitiga berwarna adalah 3^{n-1}. Jadi, pada gambar ke-10 terdapat 3^9 segitiga berwarna.

4. Sekali lagi, untuk menyelesaikan soal nomor 4 kita dapat membuat tabel sebagai berikut.

Gambar ke	1	2	3	4	...	n
Banyaknya lingkaran	1= $\frac{1\times2}{2}$	3= $\frac{2\times3}{2}$	6= $\frac{3\times4}{2}$	10= $\frac{4\times5}{2}$	...	$\frac{n \times (n+1)}{2}$

Dengan demikian, banyaknya lingkaran pada gambar ke-10 adalah 55.

Dari contoh-contoh soal di atas kita dapat menuliskan **barisan** bilangan yang sesuai sebagai berikut.

1. Banyaknya kursi : 4, 6, 8, ...
2. Keliling bangun : 4, 8, 12, ...
3. Banyaknya segitiga berwarna : 1, 3, 9, 27, ...
4. Banyaknya lingkaran : 1, 3, 6, 10, ...

Bilangan-bilangan pada masing-masing contoh tersebut membentuk suatu **barisan** bilangan dengan pola tertentu. Tanda tiga titik (...) menunjukkan adanya bilangan-bilangan berikutnya, sebanyak tak hingga. Selain itu, setiap bilangan pada masing-masing barisan selalu dikaitkan dengan suatu **bilangan asli** yang menunjukkan **posisi** bilangan tersebut (dalam konteks contoh-contoh di atas, posisi menunjukkan gambar ke-*n*). Jadi, kita dapat meman-dang suatu barisan sebagai suatu fungsi yang domainnya berupa himpunan bilangan-bilangan asli.

Definisi:
Suatu barisan bilangan adalah suatu fungsi yang mempunyai domain (daerah asal) himpunan bilangan-bilangan asli berturuan mulai dari 1.

Barisan yang mempunyai domain himpunan bilangan asli berhingga $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, untuk suatu bilangan asli n, disebut **barisan berhingga**.

Barisan yang mempunyai domain himpunan semua bilangan asli $\{1, 2, 3, \ldots\}$ disebut **barisan tak berhingga**.

Setiap bilangan (kawan suatu bilangan asli) dalam suatu barisan disebut **suku** barisan tersebut. Suku ke-n (sering disebut juga **suku umum**) suatu barisan adalah kawan bilangan asli n, dan biasa ditulis dengan simbol a_n, u_n, s_n, t_n dan sebagainya, sehingga suatu barisan biasa dinyatakan dengan simbol seperti $\{a_n\}$. Apabila rentang nilai n tidak ditulis, dianggap barisannya tak berhingga.

Suatu barisan dapat ditulis dengan berbagai cara, yakni sebagai berikut.

1. Dengan menuliskan **semua** sukunya (khusus untuk barisan berhingga), misalnya:
   a. 1, 2, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 5, 10.
   b. 1, -1, 2, -2, 3, 4, 5, -5, 1.
   c. 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6, 7.
2. Dengan menuliskan beberapa suku pertama, seperti contoh-contoh sebelumnya. Contoh yang lain adalah sebagai berikut:
   a. 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...
   b. 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
   c. 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...
   d. 1, 2, 4, 8, 16, ...
3. Dengan menuliskan rumus suku ke-n (suku umumnya), misalnya:
   a. $a_n = 2(n+1), n = 1, 2, 3, \ldots$
   b. $a_n = 4n, n = 1, 2, 3, \ldots$
   c. $a_n = 3^{n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$
   d. $a_n = \frac{n \times (n+1)}{2}, n = 1, 2, 3, \ldots$

4. Dengan menuliskan hubungan antara dua suku berturuan (hubungan **rekursif)**, asalkan salah satu suku diketahui, misalnya:
   a. $a_1 = 4;\ a_n = a_{n-1} + 2, n = 2, 3, 4, \ldots$
   b. $a_1 = 4; a_n = a_{n-1} + 4, n = 2, 3, 4, \ldots$
   c. $a_1 = 1; a_n = 3a_{n-1}, n = 2, 3, 4, \ldots$
   d. $a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + n, n = 2, 3, 4, \ldots$
5. Dengan menyebutkan sifat-sifat bilangan pada barisan, misalnya:
   a. Barisan bilangan genap positif: 2, 4, 6, 8, ...
   b. Barisan bilangan ganjil positif: 1, 3, 5, 7, ...
   c. Barisan bilangan prima kurang dari 20: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
   d. Barisan bilangan kuadrat: 1, 4, 9, 14, 25, ...
   e. Barisan bilangan segitiga: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Dari contoh-contoh di atas dapat diketahui bahwa terdapat barisan bilangan yang tidak berpola dan terdapat barisan bilangan yang mempunyai pola. Barisan yang tidak berpola hanya dapat diketahui dengan menuliskan semua sukunya, sedangkan barisan yang bepola dapat diketahui dengan berbagai cara seperti dijelaskan di atas. Pola bilangan dalam suatu barisan juga menunjukkan aturan pembentukan barisan tersebut. Selanjutnya kita hanya akan membahas barisan dengan pola tertentu, yakni **barisan aritmetika** dan **barisan geometri**. Sebelum berlanjut, silakan Anda kerjakan soal-soal latihan di bawah ini.

Latihan 1:
Nyatakan setiap barisan di bawah ini dengan cara:
a) menuliskan rumus suku ke-n
b) menuliskan hubungan antar dua suku berturutan
c) dengan menyebutkan sifat-sifat bilangannya

1. $1, 4, 7, 10, \ldots$
2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
3. $4, 7, 10, 13, \ldots$
4. $1, -3,\ 5, -7, 11, \ldots$
5. $11, 14, 17, 20, \ldots$
6. $4, 6, 8, 10, \ldots$
7. $-2, 7, 22, 43, 70, \ldots$
8. $3, 12, 25, 42, 63, \ldots$
9. $1, 26, 99, 244, \ldots$
10. $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}, \ldots$

D. Barisan dan Deret Aritmetika

Definisi:

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang mempunyai suatu pola tertentu, yakni selisih setiap dua suku berturutan sama atau tetap. Dengan kata lain, setiap suku kecuali suku pertama pada barisan aritmetika diperoleh dari suku sebelumnya dengan cara menambah/ menguranginya dengan suatu bilangan tetap. Bilangan tetap tersebut dinamakan **beda** atau **selisih** (biasanya disimbolkan dengan *b).* Jadi, jika a_n adalah suku ke-n suatu barisan aritmetika, maka $a_{n+1} - a_n = b$ atau $a_{n+1} = a_n + b$ untuk $n = 1, 2, 3, \ldots$ dengan b suatu bilangan (konstanta) tertentu.

Suatu ***deret*** adalah jumlah suku-suku suatu barisan. Apabila barisan yang dijumlahkan mempunyai tak berhingga banyak suku, maka deretnya disebut **deret tak hingga**. Jika banyaknya suku berhingga, maka deretnya disebut **deret berhingga.** Hasil jumlahan suatu deret berhingga yang terdiri atas n suku biasanya dituliskan dengan simbol S_n, yakni

$$\boldsymbol{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}.$$

Deret berhingga tersebut juga dapat dipandang sebagai(dinamakan) **jumlah parsial ke-$\boldsymbol{n}$** dari deret tak hingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots,$$

karena merupakan jumlah n suku pertamanya saja.

Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku suatu barisan aritmetika.

Latihan 2:
Dari contoh-contoh dan soal-soal tentang barisan di atas, manakah yang merupakan barisan aritmetika? Jelaskan!

Kapan suatu barisan aritmetika dapat ditentukan? Pada bagian sebelumnya, kita sudah membahas bahwa suatu barisan dapat dinyatakan dengan berbagai cara. Apa saja?

Suatu barisan aritmetika dapat diketahui (atau ditentukan) oleh dua hal, yakni:
1) dua suku barisan tersebut, atau
2) salah satu suku dan bedanya, atau
3) salah satu suku dan jumlah beberapa suku pertama yang memuat suku yang diketahui tersebut, atau
4) jumlah beberapa suku pertama dan bedanya.

Hal itu berarti:

1) Apabila diketahui dua suku, maka beda dan jumlah n suku pertama barisan aritmetika dapat dihitung;
2) Jika diketahui salah satu suku dan beda, maka suku ke-n dan jumlah n suku pertama dapat dihitung;
3) Jika diketahui satu suku dan jumlah beberapa suku pertama yang memuat suku yang diketahui tersebut, maka suku ke-n dan beda dapat dihitung;
4) Jika diketahui jumlah n suku pertama dan beda, maka suku ke-n dapat diketahui.

1. Kasus I: diketahui dua suku barisan aritmetika

Misalkan diketahui a_m dan a_k adalah dua suku suatu barisan aritmetika dengan $k > m$. Selanjutnya, misalkan b adalah beda barisan aritmetika tersebut. Menurut definisi barisan aritmetika, berlaku:

$$a_{m+1} = a_m + b, a_{m+2} = a_{m+1} + b = a_m + 2b, \ldots, a_k = a_m + (k-m)b,$$

sehingga diperoleh:

$$\boxed{b = \frac{a_k - a_m}{k - m}.}$$

Suku ke-n barisan aritmetika tersebut adalah:

$$\boxed{a_n = a_k + (n-k)b, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Khususnya, $a_1 = a_k + (1-k)b$ atau $a_k = a_1 + (k-1)b$. Apabila hasil terakhir dimasukkan ke dalam rumus a_n, maka diperoleh hubungan antara suku pertama (a_1), suku ke-n (a_n), dan beda (b) suatu barisan aritmetika sebagai berikut:

$$a_n = a_1 + (n-1)b, n = 2, 3, 4, \dots$$

Contoh 1:
Jika diketahui suku ke-2 dan ke-3 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 2 dan 5, maka bedanya adalah 3, dan barisan aritmetikanya adalah:

$$-1, 2, 5, 8, 11, \dots$$

atau

$$a_n = 2 + 3(n-2) = (-1 + 3 \times 1) + 3(n-2) = -1 + 3(n-1).$$

Contoh 2:
Jika diketahui suku ke-5 dan suku ke-10 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 3 dan 28, maka beda barisan aritmetika tersebut adalah $\frac{28-3}{10-5} = \frac{25}{5} = 5$, sehingga barisan aritmetikanya adalah:

$$-17, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, 23, 28, \dots$$

atau
$a_n = 3 + (n-5)5 = (-17 + 4 \times 5) + (n-5)5 = -17 + (n-1)5.$

Contoh 3 (Sifat suku tengah pada barisan aritmetika):
Misalkan suku-suku a_m dan a_k (dengan $k > m$) mengapit sebanyak ganjil suku-suku lain pada suatu barisan aritmetika. Jadi, $(k-m)$ dan $(k+m)$ merupakan bilangan-bilangan genap (habis dibagi 2). Suku yang terletak di tengah-tengah antara a_m dan a_k adalah:
$a_{\frac{m+k}{2}} = a_m + \left(\frac{m+k}{2} - m\right)b$ dengan $b = \frac{a_k - a_m}{k-m}$, atau

$$a_{\frac{m+k}{2}} = a_m + \left(\frac{k-m}{2}\right)\left(\frac{a_k - a_m}{k-m}\right) = \frac{a_m + a_k}{2}.$$

Jadi, *pada barisan aritmetika, nilai suku yang terletak* ***di tengah-tengah antara dua suku*** *yang mengapit sebanyak ganjil suku-suku lain sama dengan* ***rata-rata kedua suku*** *tersebut. Suku tengah merupakan* ***rata-rata aritmetika*** *kedua suku yang mengapitnya.*

2. **Kasus II: diketahui salah satu suku dan beda**
   Misalkan diketahui a_k adalah suku ke-k suatu barisan aritmetika yang mempunyai beda b. Misalkan a_n adalah suku ke-n. Dari hasil pada kasus I diperoleh bahwa:

   $$a_n = a_k + (n-k)b, \qquad n = 1, 2, 3, \dots.$$

   Khususnya juga, $a_1 = a_k + (1-k)b$ atau $a_k = a_1 + (k-1)b$. Persis seperti hasil sebelumnya pada kasus I, diperoleh hubungan antara suku pertama (a_1), suku ke-n (a_n), dan beda (b) suatu barisan aritmetika sebagai berikut:

   $$a_n = a_1 + (n-1)b, n = 2, 3, 4, \dots$$

   Contoh 4:
   Diketahui suatu barisan aritmetika mempunyai suku ke-5 adalah 10 dan beda 3. Tentukan suku ke 15!
   Jawab:
   Diketahui $a_5 = 10, b = 3$. *Menurut rumus yang sudah diperoleh,* $a_{15} = a_5 + (15-5)b = 10 + 30 = 40$.

3. **Kasus III: diketahui salah satu suku dan jumlah n suku pertama**

Sebelum membahas kasus ketiga, kita cari jumlah n suku pertama barisan aritmetika. Sebelumnya sudah diperkenalkan notasi S_n yang menyatakan jumlah n suku pertama suatu barisan, yakni

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Untuk barisan aritmetika sudah diketahui rumus suku ke-n dapat dinyatakan dengan suku pertama (a_1) dan beda (b), yakni:

$$a_n = a_1 + (n-1)b \text{ untuk } n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Dengan demikian jumlah n suku pertama suatu barisan aritmetika dengan suku pertama (a_1) dan beda (b) adalah:

$$S_n = a_1 + (a_1 + b) + (a_1 + 2b) + \cdots + (a_1 + [n-1]b).$$

Untuk mendapatkan nilai deret tersebut, suku-sukunya kita tulis dari suku terakhir ke suku pertama sebagai berikut:

$$S_n = (a_1 + [n-1]b) + (a_1 + [n-2)b) + (a_1 + [n-3]b) + \cdots + a_1$$

Selanjutnya, jika keduanya dijumlahkan hasil adalah:

$$2S_n = \{2a_1 + [n-1]b\} + \{2a_1 + [n-1]b\} + \cdots + \{2a_1 + [n-1]b\}$$

dengan ruas kanan terdiri atas n suku bernilai sama dalam tanda {}, sehingga

$$2S_n = n \times \{2a_1 + [n-1]b\}$$

atau

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + [n-1]b\} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).}$$

Jadi, *jumlah n suku pertama suatu barisan aritmetika dapat dinyatakan dengan salah satu suku dan beda atau suku pertama dan suku ke-*n.

Sekarang misalkan suatu barisan aritmetika diketahui suku ke-k adalah a_k dan jumlah n suku pertama adalah S_n. Dari hasil sebelumnya diketahui bahwa $a_1 = a_k + (1-k)b$, sehingga

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\{2(a_k + (1-k)b) + [n-1]b\} = n \times a_k + \frac{n}{2}(n - 2k + 1)b.}$$

Dari persamaan terakhir dapat dicari nilai b dan selanjutnya rumus suku ke-n barisan aritmetikanya.

Contoh 5:

Jika diketahui suku ke-2 dan ke-3 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 2 dan 5, tentukan jumlah 10 suku pertama.

***Jawab*:**

Dari data yang diketahui, diperoleh beda barisan aritmetika tersebut adalah $b = 5 - 2 = 3$, *sehingga* $a_1 = 2 - 3 = -1$ *dan* $a_{10} = -1 + 3 \times 9 = 26$. *Jadi,* $S_{10} = 5 \times (-1 + 26) = 125.$

Contoh 6:

Jika diketahui suku ke-5 dan suku ke-10 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 3 dan 28, tentukan jumlah 15 suku pertamanya.

Jawab:

Barisan aritmetika tersebut mempunyai beda $b = 5$ *(lihat Contoh 2), sehingga* $a_1 = 3 + (-4)5 = -17$ *dan* $a_{15} = -17 + 14 \times 5 = 53$. *Jadi,* $S_{15} = \frac{15}{2}(-17 + 53) = 240$.

Contoh 7:

Diketahui suatu barisan aritmetika mempunyai suku ke-5 adalah 10 dan beda 3. Tentukan jumlah 15 suku pertama!

Jawab:

Dari data tersebut dapat dicari $a_1 = 10 - 4 \times 3 = -2$ dan $a_{15} = -2 + 14 \times 3 = 40$, sehingga $S_{15} = \frac{15}{2}(-2 + 40) = 285$.

Contoh 8:

Tentukan barisan aritmetika yang mempunyai suku ke-5 adalah 10 dan jumlah 50 suku pertamanya adalah 2550.

Jawab:

Dengan menggunakan rumus pada hasil terakhir diperoleh persamaan $2550 = S_{50} = 50 \times a_5 + \frac{50}{2}(50 - 9)b = 50 \times 10 + 25 \times 41 \times b$, *sehingga* $b = \frac{2550-500}{1025} = 2$. *Jadi,* $a_n = 10 + 2(n - 5) = 2n$, *yakni*

2, 4, 6, 8, 10, ...

4. **Kasus IV: diketahui jumlah n suku pertama dan beda**

Dari hasil pada kasus III diperoleh hubungan antara jumlah n suku pertama, salah satu suku, dan beda suatu barisan aritmetika. Dengan demikian, apabila diketahui jumlah n suku pertama dan beda, maka dapat dicari salah satu sukunya (misalnya suku pertama). Setelah diperoleh salah satu suku, maka suku ke-n dapat ditentukan untuk setiap n bilangan asli.

Contoh 9:

Jika suatu barisan aritmetika mempunyai beda 4 dan jumlah 16 suku pertama adalah 528, tentukan barisan aritmetika tersebut.

Jawab:

Diketahui $S_{16} = 528$ *dan* $b = 4$. *Dengan menggunakan rumus terakhir pada hasil kasus III, diperoleh persamaan*

$$528 = S_{16} = 16a_1 + 8(16 - 1)b = 16a_1 + 8 \times 15 \times 4,$$

sehingga $a_1 = \frac{528-480}{16} = 3$. *Jadi,* $a_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$, *yakni*

$$3, 7, 11, 15, 19, \ldots$$

Contoh 10:

Misalkan jumlah 8 suku pertama suatu barisan aritmetika adalah 74 sedangkan jumlah 24 suku pertama adalah 702. Tentukan barisan aritmetika tersebut.

Jawab:

Diketahui $S_8 = 74$ *dan* $S_{24} = 702$. *Untuk mengetahui barisannya, kita perlu mencari nilai beda. Dengan menggunakan rumus* S_n *diperoleh dua persamaan:*

(1) $74 = S_8 = \frac{8}{2}(2a_1 + 7b) = 8a_1 + 28b$

(2) $702 = S_{24} = \frac{24}{2}(2a_1 + 23b) = 24a_1 + 276b$.

Selanjutnya, eliminir a_1 *dari kedua persamaan tersebut untuk mendapatkan* b, *yakni (2)-3(1):* $480 = 192b$ *atau* $b = \frac{5}{2}$,*sehingga* $a_1 = \frac{74-70}{8} = \frac{1}{2}$. *Jadi*

$$a_n = \frac{1}{2} + (n - 1)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5n}{2} - 2,$$

atau

$$\frac{1}{2}, 3, 5\frac{1}{2}, 8, 10\frac{1}{2}, \ldots$$

Latihan 3:
1. Diketahui suku ke-n suatu barisan adalah $a_n = 3n - 2$. a) Tunjukkan bahwa barisan tersebut merupakan barisan aritmetika. b) Tentukan suku terkecil pada barisan tersebut yang nilainya lebih besar daripada 450. c) Tentukan jumlah n suku pertama barisan tersebut.

2. Tentukan nilai k pada setiap barisan aritmetika yang terdiri atas tiga bilangan sebagai berikut:
   a) $3,\ k,\ 32$ b) $k+1,\ 2k+1,\ 13$ c) $5,\ k,\ k^2-8$
3. Tentukan suku ke-n dalam bentuk yang paling sederhana jika diketahui dua suku barisan aritmetika:
   a) $a_7 = 41,\ a_{13} = 77$ b) $a_5 = -2,\ a_{13} = 77$ c) $a_7 = 1, a_{15} = -39$
4. Tentukan (tulis suku-suku) barisan aritmetika dengan cara:
   a) Menyisipkan tiga bilangan antara 5 dan 10.
   b) Menyisipkan enam bilangan antara -1 dan 32.
5. Jumlah 5 buah bilangan yang membentuk barisan aritmetika adalah 75. Jika hasil kali bilangan terkecil dan terbesar adalah 161, tentukan selisih bilangan terbesar dan bilangan terkecil.
6. Suku pertama suatu deret aritmetika adalah 5, suku terakhirnya adalah 23, dan selisih suku ke-8 dengan suku ke-3 adalah 10. Tentukan banyak suku dalam deret itu.
7. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah $S_n = 2n^2 - 6n$. Tentukan suku ke-n deret tersebut.
8. Jumlah dari 33 suku pertama dari deret aritmetika adalah 891. Jika suku pertama deret tersebut adalah 7, tentukan suku ke-33.
9. Lima belas bilangan membentuk deret aritmetika dengan beda positif. Jika jumlah suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 188 dan selisih suku ke-13 dan ke-15 sama dengan 14, tentukan jumlah lima suku terakhir.
10. Tentukan jumlah bilangan di antara 5 dan 100 yang habis dibagi 7 tetapi tidak habis dibagi 4.
11. Suku tengah suatu deret aritmetika adalah 25. Jika bedanya adalah 4 dan suku ke-5 adalah 21, tentukan jumlah semua suku barisan tersebut.
12. Sebuah deret aritmetika mempunyai suku ketiga -11 dan jumlah dua puluh suku yang pertama 230, tentukan jumlah sepuluh suku pertama deret tersebut.
13. Pada barisan aritmetika 1, 3, 5, 7, ...
    a) Tentukan suku ke-n
    b) Buktikan bahwa $S_n = n^2$
    c) Periksa hasil tersebut dengan menghitung $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4$.
14. Sisipkan sejumlah bilangan antara 1 dan 50 sehingga membentuk barisan aritmetika yang jumlahnya 459.
15. Akar-akar persamaan $x^4 + 4x^3 - 84x^2 - 176x + 640 = 0$ membentuk suatu barisan aritmetika. Tentukan akar-akar tersebut.
16. Suatu deret aritmetika mempunyai jumlah parsial ke-n $S_n = \frac{n}{2}(7n+5)$. Tentukan: a) jumlah parsial ke berapa yang nilainya 425, b) suku ke-6.
17. Suatu deret aritmetika mempunyai jumlah parsial ke-n $100a_1$dan suku ke-n $9a_1$ dengan $a_1 \neq 0$. Tentukan nilai n.
18. Suatu deret aritmetika mempunyai beda 3, suku ke-n 93 dan jumlah parsial ke-n 975. Tentukan nilai n.
19. Jumlah parsial ke-n suatu deret aritmetika adalah $S_n = 5n^2 - 11n$. Tentukan beda barisan aritmetika tersebut.
20. Suatu deret aritmetika mempuyai suku ke-3 sama dengan -7 dan suku ke-7 sama dengan 9. Tentukan jumlah parsial ke-51.
21. Berapakah hasil penjumlahan $4 + 7 + 10 + \cdots + 901$?

E. Barisan dan Deret Geometri

Definisi:

Suatu **barisan geometri** adalah suatu barisan bilangan yang mempunyai pola tertentu, yakni tiap suku (kecuali suku pertama) diperoleh dengan cara mengalikan suku sebelumnya dengan dengan suatu bilangan tetap selain nol. Dengan kata lain, pada suatu barisan geometri hasil bagi atau rasio setiap suku dengan suku sebelumnya selalu sama. Bilangan pengali atau hasil bagi tersebut dinamakan **pembanding** atau **rasio** atau ada yang menyebut **rasio bersama** dan biasanya disimbolkan dengan huruf r.

Jadi, barisan $a_1, a_2, a_3, \dots$ merupakan suatu barisan geometri apabila terdapat $r \neq 0$ sedemikian hingga:

$$a_{n+1} = a_n r \text{ atau } \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \dots$$

Sutau **deret geometri** adalah jumlah suku-suku barisan geometri.

1. Rumus Suku ke-n Barisan Geometri

Misalkan barisan $a_1, a_2, a_3, \dots$ merupakan suatu barisan geometri. Menurut definisi, berarti terdapat $r \neq 0$ sedemikian hingga:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 r \\
&a_3 = a_2 r = a_1 r^2 \\
&a_4 = a_3 r = a_1 r^3 \\
&\vdots \\
&a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}.
\end{aligned}$$

Jadi, apabila suku pertama suatu barisan geometri adalah a dan rasionya r, maka suku ke-n adalah

$$a_n = ar^{n-1}.$$

Bagaimana jika yang diketahui dua suku yang tidak berturutan? Misalkan a_m dan a_k adalah berturut-turut suku ke-m dan suku ke-k suatu barisan geometri. Anggap $m > k$. Misalkan suku pertamanya adalah a dan rasionya adalah r. Dari hasil di atas diperoleh:

(1) $a_k = ar^{k-1}$
(2) $a_m = ar^{m-1} = ar^{k-1}r^{m-k} = a_k r^{m-k}$

Dari (2) dapat dihitung r, kemudian dari (1) dapat dihitung a, dan barisan geometrinya dapat ditentukan.

Contoh 11:
Jika suku ke-1 satu barisan geometri adalah 27 dan suku ke-4 sama dengan 1, tentukan barisan geometri tersebut.
Jawab:
Diketahui $a_1 = 27$ *dan* $a_4 = 1$. *Menurut rumus suku ke-*n *barisan geometri diperoleh* $1 = a_4 = a_1 r^3 = 27r^3$, *sehingga* $r = \frac{1}{3}$. *Jadi, barisan geometri yang dimaksud adalah*

$$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots \text{ atau } a_n = 27r^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Contoh 12 (Hubungan barisan geometri dan barisan aritmetika):
Perhatikan barisan geometri

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots.$$

yang mempunyai suku pertama a dan rasio r. Logaritma suku-suku barisan geometri tersebut membentuk barisan

$$\log a, \log ar, \log ar^2, \log ar^3, \ldots.$$

atau

$$\log a, (\log a + \log r), (\log a + 2\log r), (\log a + 3\log r), \ldots$$

yang ternyata membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama $\log a$ dan beda $\log r$. Jadi, logaritma suku-suku barisan geometri membentuk barisan aritmetika.

Latihan 4
1. Dalam suatu kejuaraan basket, setiap tim pertanding melawan salah satu tim lain pada setiap putaran. Tim yang kalah bertanding tidak maju pada babak berikutnya. Apabila pada babak pertama terdapat 128 tim. Tentukan banyaknya pertandingan sampai kejuaraan tersebut selesai. 2. Tentukan rasio, suku umum, dan suku ke-10 barisan geometri yang diketahui: a) suku pertama 8 dan suku ke-6 adalah $\frac{1}{4}$ b) suku pertama 3 dan suku ke-5 adalah 243 c) suku ke-3 adalah 12 dan suku ke-6 adalah 96 d) suku ke-4 adalah 16 dan suku ke-6 adalah 64 3. Tiga bilangan membentuk barisan geometri. Jika hasilkalinya adalah 216 dan jumlahnya 26, tentukan rasio deret tersebut. 4. Suku pertama dan suku kedua suatu deret geometri berturut-turut adalah r^2 dan r^x. Jika suku ke-5 deret tersebut adalah r^{18}, tentukan nilai x. 5. Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$. Jika tiga bilangan 12, x_1, x_2 membentuk suatu barisan aritmetika dan tiga bilangan x_1, x_2, 4 membentuk suatu barisan geometri, tentukan diskriminan persamaan kuadrat tersebut.

2. Jumlah n suku pertama barisan geometri

Jumlah n suku pertama suatu barisan geometri merupakan deret geometri, yakni $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1}$ dengan a_1 suku pertama dan $r \neq 1$ adalah rasionya. Jika kedua ruas dikalikan r, maka diperoleh $rS_n = a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1} + a_1r^n$, sehingga:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n \text{ atau } (1-r)S_n = a_1(1-r^n).$$

(1) Apabila $r \neq 1$, maka diperoleh $\boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}}$.

(2) Untuk $r = 1$, $a_1 = a_2 = a_2 = \cdots = a_n$ sehingga $S_n = na_1$.

Komentar:

Ada yang mengatakan/menuliskan bahwa rumus $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ berlaku untuk $0 < r < 1$ dan rumus $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ berlaku untuk nilai r yang lain. Hal ini tidak sepenuhnya benar, karena kedua rumus adalah identik dan berlaku untuk semua $r \neq 1$. (Apakah rumus tersebut berlaku untuk $r = 0$?)

Contoh 13:

Diketahui deret geometri $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$

1. Tentukan rasio deret tersebut
2. Tentukan suku ke-21

3. Tentukan jumlah 9 suku pertama pada deret tersebut

Jawab:

a. *Rasio deret tersebut adalah:* $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$

b. *Karena suku pertama* $a = 2$ *dan rasionya* $r = 3$*, maka suku ke-*n *adalah* $a_n = 2 \times 3^{n-1}$*, sehingga suku ke-21 adalah* $a_{21} = 2 \times 3^{20}$.

c. $S_9 = \frac{2(3^9-1)}{3-1} = 3^9 - 1 = 19682$.

Latihan 5:

1. Tiga bilangan merupakan suku-suku berturutan suatu deret aritmetika. Selisih bilangan ketiga dengan bilangan pertama adalah 6. Jika bilangan ketiga ditambah 3 maka ketiga bilangan tersebut merupakan deret geometri. Tentukan jumlah dari kuadrat bilangan tersebut.
2. Persamaan $2x^2 + x + k = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2. Apabila bilangan-bilangan x_1, x_2, $\frac{1}{2}(x_1 x_2)$ membentuk suatu barisan geometri, tentukan suku keempat deret tersebut.
3. Suatu deret geometri terdiri atas 7 suku dengan suku tengah dan terakhir masing-masing adalah 240 dan 1920. Tentukan jumlah deret geometri tersebut.
4. Tiga bilangan membentuk suatu deret geometri. Jika hasil kalinya adalah 216 dan jumlahnya 26, tentukan rasio deret tersebut.
5. Jika rasio deret geometri adalah 3 dan suku ke-8 adalah 10935, tentukan suku ke-5 deret tersebut.
6. Hitunglah jumlah parsial ke-11 pada deret geometri $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots$.
7. Tunjukan bahwa $54 + 18 + 6 + \cdots + 5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 81 - 3^{4-n}$.
8. Suatu deret geometri mempunyai suku ke-8 sama dengan 640 dan suku ke-3 sama dengan 20. Hitunglah jumlah parsial ke-7.
9. Perbandingan jumlah tiga suku pertama suatu deret geometri dan jumlah suku-suku ke-4, ke-5, dan ke-6 adalah 8:27. Apabila suku ke-3 sama dengan 8, tentukan rasio deret geometri tersebut.

3. Deret Geometri Tak Berhingga

Berpakah jumlah deret geometri $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ sampai tak berhingga suku?

Sebenarnya tidaklah mungkin menghitung deret tak berhingga tersebut, karena kita tidak tahu berapa suku terakhirnya. Akan tetapi dalam matematika kita dapat menggunakan konsep **limit**. Sebelumnya kita sudah mendapatkan rumus jumlah n suku pertama suatu deret geometri yang rasionya selain 1, yakni $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$. Apabila nilai n mendekati tak berhingga berarti kita menjumlahkan deret tak berhingga, dan ini biasanya dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} S_\infty &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots. \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{1(1-r^n)}}{1-r} \\ &= \left(\frac{a_1}{1-r}\right) \lim_{n\to\infty} (1 - r^n) \\ &= \left(\frac{a_1}{1-r}\right) (1 - \lim_{n\to\infty} r^n) \end{aligned}$$

$$= \frac{a_1}{1-r}(1-0), \text{ jika } |r| < 1$$
$$= \frac{a_1}{1-r}, \text{ jika } |r| < 1.$$

Perhatikan bahwa keberadaan nilai jumlah tak berhingga suatu deret geometri sangat tergantung pada nilai rasionya, yakni r.

(1) Untuk $|r| > 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ tidak mempunyai nilai (hasilnya $\pm\infty$), sehingga S_∞ tidak dapat dihitung. Dalam hal deret geometri tersebut dikatakan **divergen**.

(2) Untuk $-1 < r < 1, \lim_{n\to\infty} r^n = 0$, sehingga

Contoh 14:

Suatu deret geometri tak berhingga mempunyai suku pertama 1 dan jumlah suku-suku yang bernomor ganjil adalah 2. Apabila deret tersebut mempunayi rasio positif, tentukan jumlah deret tersebut.

Jawab:

Misalkan deret geometrinya adalah: $1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots$

Jumlah suku-suku bernomor ganjil adalah: $1 + r^2 + r^4 + \cdots$ *merupakan suatu deret geometri dengan suku pertama 1 dan rasio* r^2*. Karena diketahui* $2 = 1 + r^2 + r^4 + r^6 + \cdots = \frac{1}{1-r^2}$*, maka* $1 - r^2 = \frac{1}{2}$ *atau* $r^2 = \frac{1}{2}$*. Karena diketahui* $r > 0$*, maka* $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$*. Jadi, jumlah deret semula adalah* $S_\infty = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$.

Latihan 6:

1. Suku-suku suatu barisan geometri tak berhingga adalah positif, jumlah suku pertama dan kedua adalah 45 dan jumlah suku ketiga dan keempat adalah 20. Tentukan jumlah suku-suku barisan tersebut.
2. Suatu deret geometri tak berhingga mempunyai rasio ${}^7\log(3x-2)$. Jika deret ini mempunyai jumlah (konvergen), tentukan nilai x.
3. Tentukan jumlah deret tak berhingga:
$$1 - \tan^2 30^o + \tan^4 30^o - \tan^6 30^o + \cdots + (-1)^n \tan^{2n} 30^o + \cdots.$$
4. Suatu deret geometri konvergen mempunyai limit (jumlah tak berhingga) $\frac{1}{2}$, sedangkan suku ke-2 dan ke-4 berturut-turut adalah 2 dan $\frac{8}{3}$. Tentukan suku pertamanya.
5. Suatu deret geometri tak berhingga mempnyai suku-suku positif, jumlah suku-suku $a_1 + a_2 = 45$ dan $a_3 + a_4 = 20$. Tentukan jumlah deret tersebut.
6. Jika jumlah semua suku deret geometri tak hingga adalah 96 dan jumlah semua sukunya yang berindeks ganjil adalah 64, tentukan suku ke-4 deret tersebut.
7. Hitunglah $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$
8. Tentukan nilai x agar deret geometri $2 + \frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{9}(x+1)^2 + \cdots$ konvergen
9. Suatu deret geometri yang suku-sukunya positif mempunyai jumlah tak berhingga sama dengan $4\frac{1}{6}$. Apabila suku ke-2 sama dengan $2\frac{2}{3}$ tentukan suku pertama dan rasio deret tersebut.
10. Tunjukkan bahwa deret geometri $2(5)^5 + 2(5)^4 + 2(5)^3 + 2(5)^2 + \cdots$ konvergen, kemudian tentukan jumlah parsial ke-n.

F. Notasi Sigma ($\sum$)

Di dalam matematika banyak digunakan berbagai simbol untuk menyingkat dan menye-derhanakan penulisan ekspresi-ekspresi yang panjang dan rumit. Demikian juga, untuk menuliskan suatu deret dapat digunakan notasi **sigma** ($\sum$) yang merupakan huruf besar "S" dalam alfabet Yunani, yang berarti "jumlah". Deret $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ dapat disingkat menjadi $\sum_{k=1}^{n} a_k$. Jadi,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Pada notasi sigma, kita menjumlahkan ekspresi yang tertulis disebelah kanan $\sum$ untuk semua nilai indeks mulai nilai indeks yang tertulis di bawah tanda $\sum$ sampai nilai indeks yang tertulis di atas tanda $\sum$. Apabila notasi sigma ditulis di tengah suatu kalimat, biasanya rentang nilai indeks ditulis bukan di bawah dan di atasnya, tapi di pojok kanan bawah dan kanan atas. Hal ini bertujuan untuk menghindari spasi kosong yang terlalu lebar antar baris (lihat contoh-contoh tampilan di atas).

Berikut adalah contoh-contoh penggunaan notasi sigma.

Contoh 15:

1. $\sum_{i=5}^{10} i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{6}{3}(5 + 10) = 45.$
2. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1 + n)$ (Mengapa?)
3. $\sum_{k=1}^{10} 2 = \underbrace{2 + 2 + 2 + \cdots + 2}_{10 \text{ suku}} = 10 \times 2 = 20.$
4. $\sum_{k=1}^{10} 3x^k = 3x + 3x^2 + 3x^3 + \cdots + 3x^{10}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Berikut adalah beberapa sifat aljabar yang berlaku untuk notasi sigma.

1. Untuk setiap barisan $\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

2. Untuk setiap konstanta p yang tidak tergantung nilainya pada indeks i, berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} pa_i = p \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

<u>Pertanyaan</u>: Apakah berlaku $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k$? Mengapa?

Dengan menggunakan hasil-hasil dan sifat-sifat di atas, kita dapat menemu-kan rumus jumlah parsial deret aritmetika. Seperti sudah diketahui, suku ke-k deret aritmetika yang mempunyai suku pertama a dan beda b adalah $a_k = a + (k-1)b$. Dengan demikian kita dapat menuliskan deret aritmetika dengan menggunakan notasi sigma sebagai berikut.

$$\begin{aligned} a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a + [n-1]b) &= \sum_{k=1}^{n} (a + [k-1]b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a + \sum_{k=1}^{n} (k-1)b \\ &= na + b\sum_{k=1}^{n} (k-1) \\ &= na + b\sum_{k=1}^{n} k - b\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= na + b\left(\frac{n}{2}\right)(1+n) - bn \\ &= \frac{n}{2}[2a + (b(1+n) - 2b] \\ &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)b] \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Demikian pula, deret geometri dapat dinyatakan dengan menggunakan notasi sigma sebagai berikut:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\sum_{k=0}^{n-1} r^k$$

Latihan 7:

1. Nyatakan 20 suku pertama deret $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \ldots$ dengan mengguna-kan notasi $\sum$.
2. Hitunglah:

   a. $\sum_{n=1}^{4} 3(2)^{n-1}$

   b. $\sum_{k=2}^{6} 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}$

   c. $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

3. Tentukan nilai n jika diketahui $\sum_{k=1}^{n} 8\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 15\frac{3}{4}$.

G. Aplikasi Barisan dan Deret

Barisan dan deret mempunyai penerapan dalam berbagai persoalan dalam matematika. Berikut adalah beberapa contoh soal yang penyelesaiannya menggunakan barisan/deret aritmetika dan geometri.

Contoh 16 (Banyak jabatan tangan):

Dalam sebuah pertemuan setiap tamu laki-laki berjabat tangan dengan setiap tamu laki-laki lain, dan setiap tamu perempuan berjabat tangan dengan setiap tamu perempuan lain.

a. Apabila terdapat 10 tamu laki-laki dan 7 tamu perempuan, berapakah banyak jabatan tangan?

b. Apabila terdapat n tamu laki-laki dan m tamu perempuan, berpakah banyak jabatan tangan?

Jawab:

a. Banyak jabatan tangan di antara 10 tamu laki-laki adalah

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=\frac{9}{2}(9+1)=45.$$

Banyaknya jabat tangan di antara 7 tamu perempuan adalah

$$6+5+4+3+2+1=\frac{6}{2}(6+1)=21.$$

Jadi, total banyaknya jabat tangan adalah 45+21=66.

b. Dari hasil a) dapat disimpulkan bahwa banyaknya jabat tangan di anatara n tamu laki-laki adalah $\frac{(n-1)n}{2}$, dan banyaknya jabat tangan di antara m tamu perempuan adalah $\frac{(m-1)m}{2}$. Jadi total banyaknya jabat tangan adalah $\frac{1}{2}[(n-1)n+(m-1)m]$.

Contoh 17:

Diketahui sebuah persegi berukuran $4\times 4\ cm^2$. Setiap titik tengah suatu sisi dihubungkan dengan titik tengah sisi-sisi yang berdekatan sehingga terbentuk persegi baru. Proses ini dilanjutkan terus.

a. Apabila proses dilanjutkan 9 kali, berapakah jumlah semua persegi yang terbentuk?
b. Apabila proses dilanjutkan tanpa berhenti, berapakah jumlah semua persegi yang terbentuk?

Jawab:

Proses tersebut menghasilkan barisan persegi yang luasnya

$$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$$

dan merupakan barisan geometri dengan suku pertama 16 dan rasio ½ . Jadi,

a. Jika prosesnya 9 kali, maka jumlah luas persegi yang terbentuk adalah

$$16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\ \dots+16\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1023}{32}\ cm^2.$$

b. Jika prosesnya tanpa berhenti,maka julmlah luas persegi yang terbentuk adalah

$$16+8+4+2+1+\frac{1}{2}+\ \dots=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=32\ cm^2.$$

Contoh 18 (menabung sekali):

Pada awal bulan seseorang menabung sejumlah A di salah satu bank. Bank memberikan bunga p per bulan (bersih sudah dipotong pajak dan bea administrasi) yang dibayar setiap awal bulan, mulai bulan berikutnya. Maka:

1. Pada awal bulan ke-2, jumlah tabungan adalah: $A_2=A+pA=A(1+p)$.

2. Pada awal bulan ke-3, jumlah tabungan adalah:

$$A_3=A_2+pA_2$$

$$
\begin{aligned}
&= A(1+p) + pA(1+p) \\
&= A(1+p)(1+p) \\
&= A(1+p)^2
\end{aligned}
$$

3. Secara umum, apabila tidak pernah diambil, jumlah tabungan pada awal bukan ke-n adalah

$$A_n = A(1+p)^{n-1}, \qquad n \geq 2$$

Contoh 19 (menabung rutin):

Setiap awal bulan seseorang menabung sejumlah A di salah satu bank. Bank memberikan bunga p per bulan (bersih sudah dipotong pajak dan bea administrasi) yang dibayar setiap awal bulan, mulai bulan berikutnya. Maka:

1. Pada awal bulan ke-2, jumlah tabungan adalah:

$$A_2 = A + (A + pA) = A + A(1+p).$$

2. Pada awal bulan ke-3, jumlah tabungan adalah:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A + (A_2 + pA_2) \\
&= A + [A + A(1+p) + p\big(A + A(1+p)\big)] \\
&= A + [A + A(1+p) + pA + pA(1+p)] \\
&= A + A(1+p) + A(1+p)^2
\end{aligned}
$$

3. Secara umum, apabila tidak pernah diambil, jumlah tabungan pada awal bukan ke-n adalah

$$A_n = A[1 + (1+p) + (1+p)^2 + \ \ldots + (1+p)^{n-1}] = A\sum_{k=0}^{n-1}(1+p)^k$$

Latihan 8:
1. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 10 m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{4}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga berhenti. Tentukan jumlah seluruh lintasan bola. 2. Seorang karyawan menabung dengan teratur setiap bulan. Uang yang ditabung setiap bulan selalu lebih besar dari bulan sebelumnya dengan selisih yang sama. Jika jumlah seluruh tabungannya selama 12 bulan pertama adalah 192 ribu rupiah dan selama 20 bulan pertama adalah 480 ribu rupiah, tentukan besar uang yang ditabung pada bulan kesepuluh. 3. Tingkat pertumbuhan penduduk di suatu daerah pemukiman baru adalah 10% per tahun. Tentukan kenaikan jumlah penduduk dalam waktu 4 tahun. 4. Jumlah penduduk kota A selama lima bulan berturut-turut membentuk sutu deret geometri. Pada tahun terakhir jumlah penduduknya 4 juta, sedangkan jumlah tahun pertama dan ketiga sama dengan $1\frac{1}{4}$ juta. Tentukan jumlah penduduk kota A pada tahun keempat. 5. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Jika keuntungan sampai bulan keempat 30 ribu rupiah, dan sampai bulan kedelapan 172 ribu rupiah, tentukan keuntungan sampai bulan ke-18.

I. Rangkuman

1. Barisan, Deret, dan Notasi Sigma

a. Barisan adalah fungsi yang domainnya himpunan bilangan asli.
b. Setiap bilangan dalam suatu barisan merupakan kawan suatu bilangan asli dan dinamakan **suku**.
c. Jumlah suku-suku suatu barisan disebut **barisan**.

d. Jumlah n suku pertama suatu barisan disebut **jumlah umum** atau **jumlah parsial ke-n,** biasanya dinyatkan dengan S_n.
e. Setiap deret dapat dinyatakan dengan menggunakan notasi sigma ($\sum$): $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$
f. Notasi sigma mempunyai sifat:
   i. $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
   ii. $\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$

2. Barisan dan Deret Aritmetika

a. Barisan bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ merupakan barisan aritmetika jika terdapat suatu bilangan b sedemikian hingga $a_n - a_{n-1} = b$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. Bilangan b disebut **beda** atau selisih.
b. Suku umum barisan aritmetika yang mempunyai suku pertama a dan beda b adalah $a_n = a + (n-1)b$ untuk setiap $n \geq 1$.
c. Suku tengah suatu barisan aritmetika merupakan rata-rata dua suku yang mengapit-nya, yakni $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k})$ untuk setiap bilangan-bilangan asli $n > k \geq 1$.
d. Jumlah parsial ke-n deret aritmetika yang mempunyai suku pertama a dan beda b adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a + (k-1)b = \frac{n}{2}[2a + (n-1)b] = \frac{n}{2}(a + a_n).$$

e. Suatu barisan aritmetika dapat diketahui (atau ditentukan) oleh dua hal, yakni:
   1) dua suku barisan tersebut: $b = \frac{(a_n - a_m)}{(n-m)}$, untuk $n > m \geq 1$
   2) salah satu suku dan bedanya: $a_n = a_k + (n-k)b,\ n \geq 1$
   3) salah satu suku dan jumlah beberapa suku pertama yang memuat suku yang diketahui tersebut:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\{2(a_k + (1-k)b) + [n-1]b\} \\ &= n \times a_k + \frac{n}{2}(n - 2k + 1)b, \quad n > k \geq 1. \end{aligned}$$

   4) jumlah beberapa suku pertama dan bedanya.

3. Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ merupakan barisan geometri jika terdapat suatu bilangan $r \neq 0$ sedemikian hingga $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. Bilanganr r disebut **rasio**.
b. Suku umum barisan geometri yang mempunyai suku pertama a dan rasio r adalah $a_n = ar^{n-1}$ untuk setiap $n \geq 1$.
c. Jumlah parsial ke-n deret geometri yang mempunyai suku pertama a dan rasio r adalah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{(k-1)} = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}, \qquad r \neq 1.$$

d. Apabila suatu deret geometri mempunyai rasio r dengan $|r| < 1$, maka deretnya **konvergen** dan mempunyai jumlah tak berhingga

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r},$$ dengan a adalah suku pertama.

II. Daftar Pustaka

Beecher, Penna, Bittinger (2006). *Algebra and Trigonometry, 3rd ed*. New York: Pearson Addison-Wesley (Pearson Education Inc)

FHSS Authors (2008). *The Free High School Science Texts: Textbooks for High School Students Studying the Science, Mathematics Grades 10 –12*. www.fhss.org

Jerald Murdock, Ellen Kamischke, Eric Kamischke (2004). *Discovering Advanced Algebra: an Introducation*. Emryville, CA: Key Curriculum Press

Paul Urban et. al. (2004). *Mathematics for the International Students, HL Core*. Adelaide: Hase & Harris Pubs.

Barisan Tak Berhingga

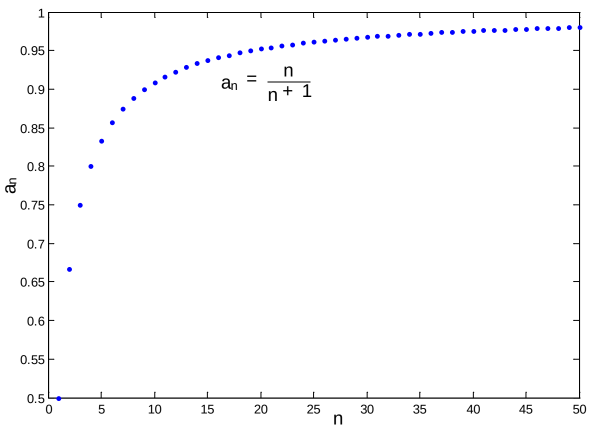
A. Definisi Barisan (Mengulang)

Suatu barisan bilangan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ merupakan suatu susunan bilangan-bilangan menurut urutan yang sesuai dengan urutan bilangan asli. Dengan kata lain, suatu barisan merupakan fungsi yang domainnya himpunan bilangan asli, dimulai dari 1. Setiap bilangan pada suatu barisan disebut **suku** barisan. Jadi, untuk setiap bilangan asli n pada domain barisan terdapat suatu bilangan a_n yang disebut **suku ke-n**. Untuk mempersingkat penulisan, barisan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ biasanya ditulis dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ atau cukup dengan $\{a_n\}$.

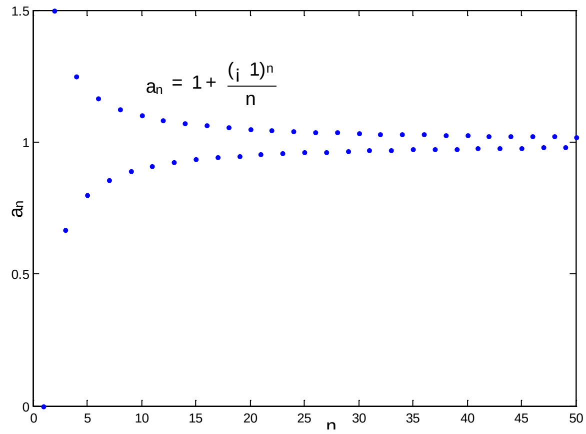
Contoh-contoh:

1. Barisan dengan rumus suku ke-n $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$, adalah: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
2. Barisan dengan rumus suku ke-n $a_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, adalah: $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
3. Barisan dengan rumus suku ke-n $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{3^n}$, $n \geq 1$, adalah: $-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \ldots$
4. Barisan dengan rumus suku ke-n $a_n = \sqrt{n-3}$, $n \geq 3$, adalah: $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$
5. Barisan dengan rumus suku ke-n $a_n = \cos\frac{n\pi}{6}$, $n \geq 1$, adalah: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 \ \ldots$
6. Barisan dengan rumus suku ke-n $a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+2}{5^n}$, $n \geq 1$, adalah: $\frac{3}{5}, \frac{-4}{25}, \frac{5}{125}, \frac{-6}{625}, \ldots$

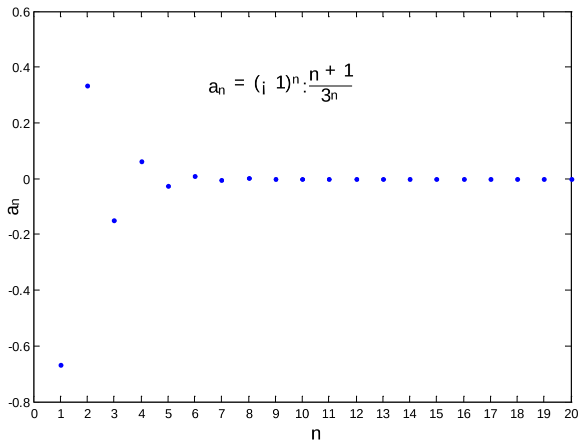
Secara geometris barisan-barisan di atas dapat digambar sebagai berikut.



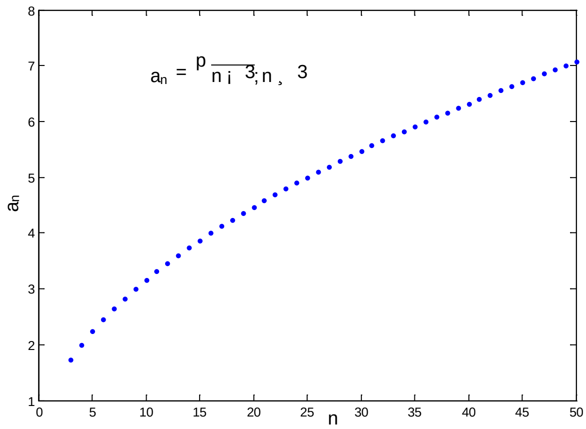
Gb1a. Deret $\{\frac{n}{n+1}\}$



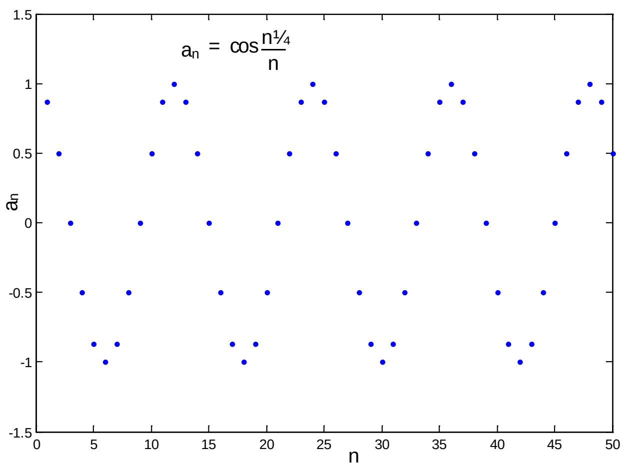
Gb 1b. Deret $\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\}$



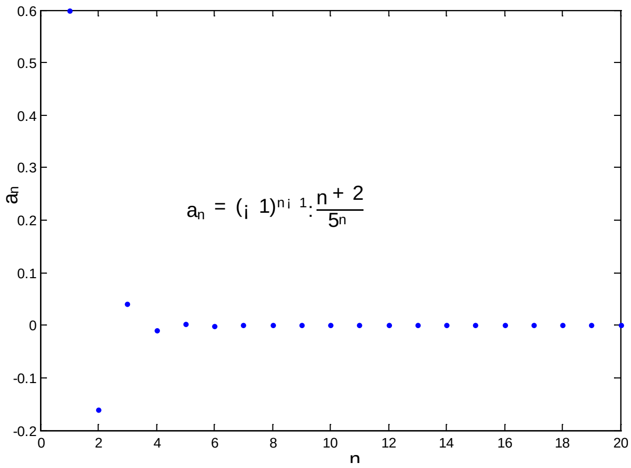
Gb 1c. Deret $\{(-1)^n . \frac{n+1}{3^n}\}$



Gb 1d. Deret $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$



Gb 1e. Deret $\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)\}$



Gb 1f. Deret $\{(-1)^{n-1}.\frac{n+2}{5^n}\}$

B. Macam-macam perilaku Barisan

Terdapat beberapa tipe yang menunjukkan perilaku suatu barisan berdasarkan nilai suku-sukunya. Kita dapat mengelompokkan suatu barisan berdasarkan perilaku suku-sukunya sebagai berikut.

1. Barisan **monoton**

   Barisan yang suku-sukunya tidak naik atau tidak turun disebut barisan **monoton**.

   Contoh:

   1). 3, 2, 1, 1, 1, 1, ...

   2). 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, ...

   Barisan yang suku-sukunya naik dan turun merupakan barisan yang **tidak monoton**.

   Contoh:

   1). 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...

   2). 1, -2, 3, -4, 5, -6, ...

   a. Barisan **monoton naik**: barisan yang suku-sukunya tidak pernah turun, yakni $a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap n.

      Contoh:

      1). 1, 1, 2, 2, 3, 3, ...

      Jikai $a_n < a_{n+1}$ untuk setiap n, barisannya disebut **monoton naik murni**.

      Contoh:

      1). 1, 2, 3, 4, 5, ...

      2). $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

   b. Barisan **monoton turun**: barisan yang suku-sukunya tidak pernah naik, yakni $a_n \geq a_{n+1}$ untuk setiap n.

      Contoh:

      1). $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$

      Jikai $a_n > a_{n+1}$ untuk setiap n, barisannya disebut **monoton turun murni**.

      Contoh:

      1). $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2. Barisan **terbatas:** barisan yang semua sukunya terletak di antara dua bilangan riil, artinya terdapat dua bilangan riil m dan M sedemikian hingga $m \leq a_n \leq M$ untuk semua n. Dengan kata lain, terdapat suatu bilangan rill R sedemikian hingga $|a_n| \leq P$ untuk semua n.
   Contoh:
   1). $\{\frac{n}{n+1}\}$ adalah barisan terbatas, karena $\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ untuk setiap n.
   2). $\{\cos(\frac{n\pi}{6})\}$ adalah barisan terbatas, karena $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \leq 1$ untuk setiap n.
   a. Barisan **terbatas ke atas:** yakni suatu barisan yang semua sukunya kurang daripada suatu nilai tertentu. Artinya, terdapat bilangan riil M sedemikian hingga $a_n \leq M$ untuk semua n.
      Contoh:
      1). $\{-n\}$ adalah barisan terbatas ke atas, karena $-n \leq 0$ untuk semua bilangan asli n.
   b. Barisan **terbatas ke bawah**: yakni suatu barisan yang semua sukunya lebih besar daripada suatu nilai tertentu. Artinya, terdapat bilangan riil m sedemikian hingga $a_n \geq m$ untuk semua n.
      Contoh:
      1). $\{\sqrt{n-3}\}$ adalah barisan terbatas ke bawah, karena $\sqrt{n-3} \geq 0$ untuk semua $n \geq 3$

   Barisan yang terbatas adalah barisan yang terbatas ke atas dan ke bawah.

Pertanyaan:

1). Apakah semua barisan pasti terbatas, terbatas ke atas, atau terbatas ke bawah? Berikan contohnya!

2). Apakah semua barisan monoton pasti terbatas? Berikan contohnya!

3). Apakah semua barisan terbatas pasti monoton? Berikan contohnya!

C. Limit dan Kekonvergenan Barisan

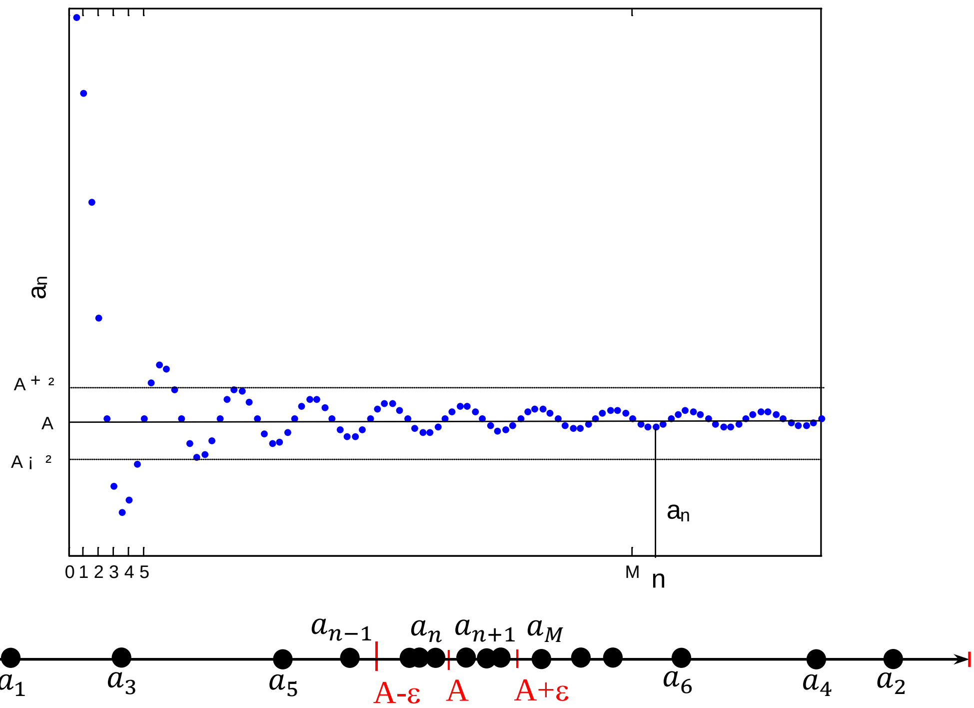
Untuk setiap barisan tak berhingga, kita dapat memperhatikan bagaimana kecenderungan suku-sukunya, apakah makin lama nilainya menuju ke suatu nilai tertentu atau tidak. Apabila suku-suku suatu barisan nilainya makin lama menuju ke suatu nilai (bilangan) tertentu, maka barisan tersebut dikatakan **konvergen**. Sebaliknya, apabila makin lama nilai suku-suku suatu barisan tidak menuju ke suatu nilai (bilangan) tertentu, barisan tersebut dikatakan **divergen**. Perhatikan, untuk mengetahui apakah suatu barisan konvergen atau tidak kita hanya memperhatikan suku-suku yang di "belakang", bukan suku-suku yang di "depan". Secara matematis, kekonvergenan suatu barisan didefinisikan sebagai berikut:

> *Suatu barisan $\{a_n\}$ dikatakan **konvergen** apabila $lim_{n\to\infty} a_n$ ada nilainya. Selanjutnya, dikatakan barisan $\{a_n\}$ konvergen ke A, atau $lim_{n\to\infty} a_n = A$ (dengan A adalah suatu bilangan nyata), apabila untuk setiap bilangan positif ϵ, terdapat bilangan asli N, sedemikian hingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $|a_n - A| < \epsilon$. Sebaliknya, apabila $lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada nilainya, barisan tersebut dikatakan **divergen**.*

Ilustrasi pengertian limit barisan ditunjukkan pada Gb 2. Perhatikan, jika dibandingkan dengan limit fungsi, perbedaan $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ adalah bahwa n harus bilangan asli. Dengan demikian, kita dapat merumuskan hasil sebagai berikut.

Teorema:

> Jika $lim_{x\to\infty} f(x) = A$ dan $a_n = f(n)$, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.



Gb2. Ilustrasi $\lim_{(n\to\infty)} a_n = A$

Contoh:

Barisan $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ konvergen ke 1, yakni $\lim_{(n\to\infty)} a_n = 1$. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli M, sedemikian hingga jika $n > M$ berlaku $|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$ atau $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Jadi, dalam hal M dapat dipilih bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan $(\frac{1}{\epsilon} - 1)$.

Muncul pertanyaan menarik, yakni jika memperhatikan perilaku suatu barisan, kapan suatu barisan konvergen? Dengan kata lain, apa syarat suatu barisan mempunyai limit?