PROGRAM PASCASARJANA UNY
UJIAN AKHIR SEMESTER GENAP 2013/2014

MATA KULIAH : SISTEM DINAMIK I
HARI/TANGGAL : RABU/11 JUNI 2014
PRODI : PMAT S2
RUANG : R. 306 A GEDUNG LAMA
WAKTU : 13.00 – 14.40
DOSEN : HARTONO
SIFAT : OPEN BOOKS

SOAL 1 (40 POINTS):
Gambarkan diagram bifurkasi dari persamaan diferensial berikut ini

$$\dot{x} = x^3 - \lambda x$$

dengain λ adalah parameter riel dan $\dot{x}$ adalah derivatif dari x terhadap variabel t.
Beri penjelasan dari gambar diagramnya.

SOAL 2 (60 POINTS):
Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\dot{x} = a + x^2, \quad \dot{y} = a + y^2$$

Pilihlah nilai a, kemudian pilih juga 2 buah nilai awal (titik awal) dan selanjutnya gambarkan trayektori-trayektori yang bersesuaian dengan nilai awal tersebut serta beri penjelasan tentang kedua trayektori tersebut.

*** apakah suatu dosa kalau aku bekerjasama dalam ujian? ***

Kunci Sistem Dinamik I, 2014

① $\dot{x} = x^3 - \lambda x = x(x^2 - \lambda)$

Jika $\lambda \leq 0$, maka hanya ada 1 titik kritis yaitu $\bar{x} = 0$.

Jika $\lambda > 0$, maka ada 3 titik kritis yaitu $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \sqrt{\lambda}$, $\bar{x} = -\sqrt{\lambda}$.

Misalkan $f(x) = x^3 - \lambda x$, maka $f'(x) = 3x^2 - \lambda$.

(a) Jika $\lambda < 0$, maka $f'(0) = -\lambda > 0$. shg $\bar{x} = 0$ tak stabil

(b) Jika $\lambda = 0$, maka $f'(0) = 0$, tidak bisa disimpulkan berdasarkan $f'(0)$..

Untuk $\lambda = 0$, maka $\dot{x} = x^3$. Phase portraitnya sbb:

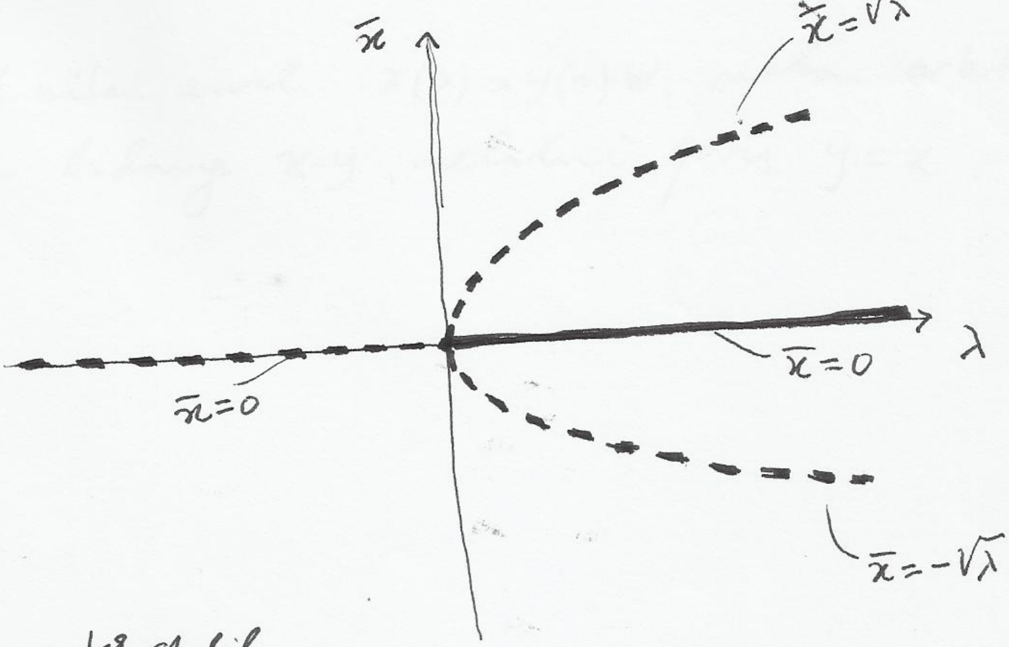
Jadi $\bar{x} = 0$ tak stabil.

(c) Jika $\lambda > 0$, maka $f'(0) = -\lambda < 0$, $f'(\sqrt{\lambda}) = 2\lambda > 0$, dan

$$f'(-\sqrt{\lambda}) = 2\lambda > 0.$$

Jadi $\bar{x} = 0$ stabil, $\bar{x} = \sqrt{\lambda}$ tak stabil, serta $\bar{x} = -\sqrt{\lambda}$ tak stabil

Diagram bifurkasinya sbb:



- - - - : tak stabil

——— : stabil

② $\dot{x} = a + x^2$

$\dot{y} = a + y^2$

jika $a > 0$, maka tidak ada titik kritis

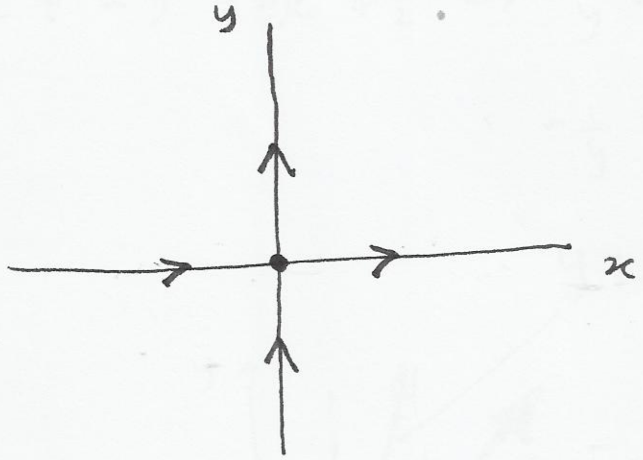
jika $a = 0$, maka ada satu titik kritis $(0,0)$

jika $a < 0$, maka ada 4 titik kritis $(\sqrt{a},\sqrt{a})$, $(\sqrt{a},-\sqrt{a})$, $(-\sqrt{a},\sqrt{a})$ dan $(-\sqrt{a},-\sqrt{a})$.

Untuk $a=0$, titik kritis $(0,0)$ tak stabil (semi stabil), sebab phase portrait untuk $\dot{x} = x^2$ adalah

dan $\dot{y} = y^2$ adalah

sehingga pada bidang (x,y) diperoleh phase-portrait



Untuk nilai awal $x(0) = y(0)$, maka orbit ~~yang~~ pada bidang x-y, melalui garis $y = x$.

III

Kasus $a=0$

$$\dot{x} = x^2 \quad , \; x(0)=1$$
$$\dot{y} = y^2 \quad , \; y(0)=2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\boxed{-y^{-1} = -x^{-1} + K}$$

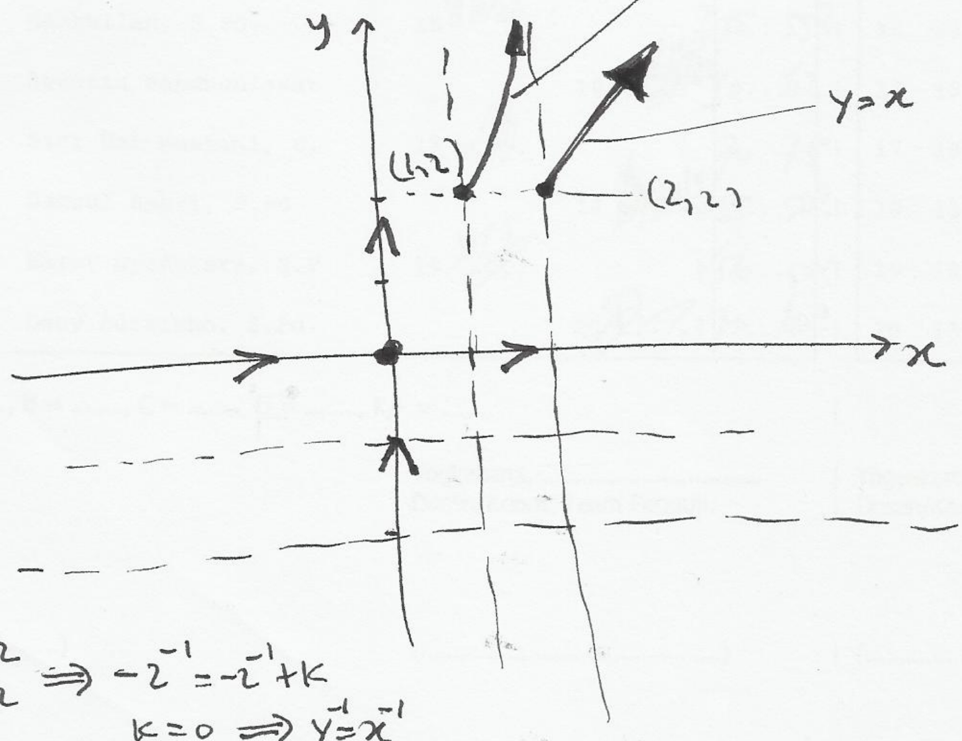
$x(0)=1$
$y(0)=2$ $\Longrightarrow$ $-2^{-1} = -1 + K$

$$K = \frac{1}{2}$$

Solusinya : $-y^{-1} = -x^{-1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{y} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{y} = \frac{-2+x}{2x} = \frac{x-2}{2x}$$

$$y = \frac{2x}{2-x}$$



$x(0)=2$
$y(0)=2$ $\Longrightarrow -2^{-1} = -2^{-1} + K$

$K=0 \Longrightarrow y^{-1} = x^{-1}$

$\Downarrow$

$y = x$