Residu (sisa) & Pole (kutub)

Misalkan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dan $z_0 \in \mathbb{C}$.

Titik z_0 disebut titik singular dari f jika f tidak analitik di z_0 tetapi f analitik pada sebagian titik di setiap lingkungan/persekitaran/neighborhood dari z_0.

Lebih lanjut, jika ada bilangan positip ε_0 sedemikian sehingga f analitik pada $\{z \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon_0\}$ maka z_0 disebut titik singular terisolasi (isolated singular point).

Contoh 1: $f(z) = \dfrac{z+1}{z^3(z^2+1)}$. Titik-titik $z=0$, $z=i$ ~~dan z=-i~~

dan $z=-i$ merupakan titik singular terisolasi.

Contoh 2: $f(z) = \text{Log}\, z = \ln r + i\theta$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$.

Titik $z=0$ merupakan titik singular tetapi tidak terisolasi.

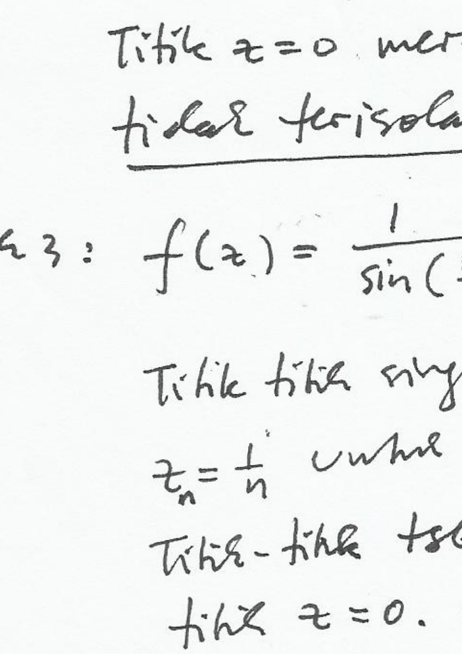
Contoh 3: $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

Titik titik singular dari f adalah $z=0$ dan

$z_n = \frac{1}{n}$ untuk $n = \cancel{0} \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Titik-titik tsb singular terisolasi kecuali titik $z=0$. ($z=0$ singular tidak terisolasi)

Catatan 1:



Jika f analitik ~~pada dan~~ di dalam kontur tertutup C kecuali di berhingga titik yakni $z_1, z_2, \ldots, z_k$.

Maka masing-masing titik tersebut merupakan titik singular terisolasi.

Catatan 2 : Jika ada bilangan positip R_1 sedemikian sehingga f analitik pada $\{z \mid R_1 < |z| < \infty\}$, maka f dikatakan mempunyai sebuah titik singular terisolasi di $z_0 = \infty$.

Definisi **Residu**

Misalkan z_0 adalah titik singular terisolasi dari f. Maka ada bilangan positip R_2 sedemikian sehingga f analitik pada $\{z \mid 0 < |z| < R_2\}$. Dengan demikian fungsi f dapat direpresentasikan kedalam deret Laurent di sekitar z_0 yaitu

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

dengan $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$ dan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\, dz .$$

dimana C adalah sebarang kontur tertutup sederhana di seputar z_0 dengan orientasi arah positip.

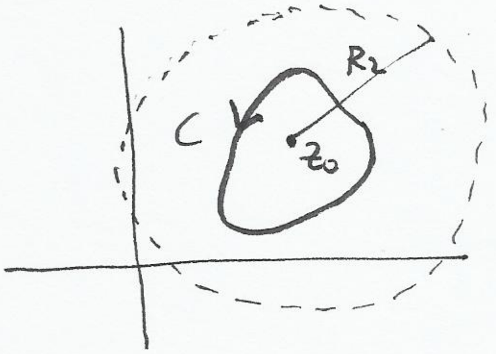
Ketika $n=1$, maka ekspresi b_n menjadi

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \quad \text{atau} \quad \int_C f(z)\, dz = 2\pi i\, b_1 .$$

Bilangan kompleks b_1 (koefisien dari $\frac{1}{z-z_0}$ pada deret Laurent) disebut <u>residu dari f</u> pada titik singular terisolasi z_0. Selanjutnya ditulis $\boxed{b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)}$

Jadi dapat ditulis

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f \,.$$



Dengan demikian dari uraian diatas dapat disimpulkan : Apabila kita dapat merepresentasikan suatu fungsi ke dalam deret Laurent disekitar titik singular terisolasi z_0, maka kita akan dapatkan residu dari f di z_0 yakni ~~ke~~ b_1 atau koefisien dari suku $\frac{1}{z-z_0}$. Selanjutnya ~~apabila~~ residu tersebut dapat digunakan untuk menghitung nilai dari integral fungsi f sepanjang kontur tertutup C. Sebagai contoh akan dihitung integral berikut

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

dimana C adalah kontur tertutup berupa lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari 1 serta berorientasi arah positip.

Misalkan $f(z) = z^2 \cdot \sin(\frac{1}{z})$. Maka f analitik diseluruh bidang kompleks kecuali di $z=0$ (titik singular terisolasi dari f). Dengan demikian f juga analitik pada $\{z \mid 0<|z|<1\}$, sehingga f ~~mempu~~ dapat direpresentasikan ke dalam deret Laurent disekitar $z=0$.

Deret Maclaurin dari $\sin z$ sbb:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \quad , |z| < \infty .$$

Sehingga deret $\sin(\frac{1}{z})$ sbb:

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} + \cdots .$$

Bentuk di atas dikalikan dengan z^2 diperoleh deret

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{5!\,z^3} + \cdots .$$

Jadi residu dari f yaitu $b_1 = -\frac{1}{3!}$ (koefisien dari suku $\frac{1}{z}$).

Dengan demikian dapat ditulis

$$\int z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=0} f = 2\pi i\, b_1$$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3!}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3} i$$

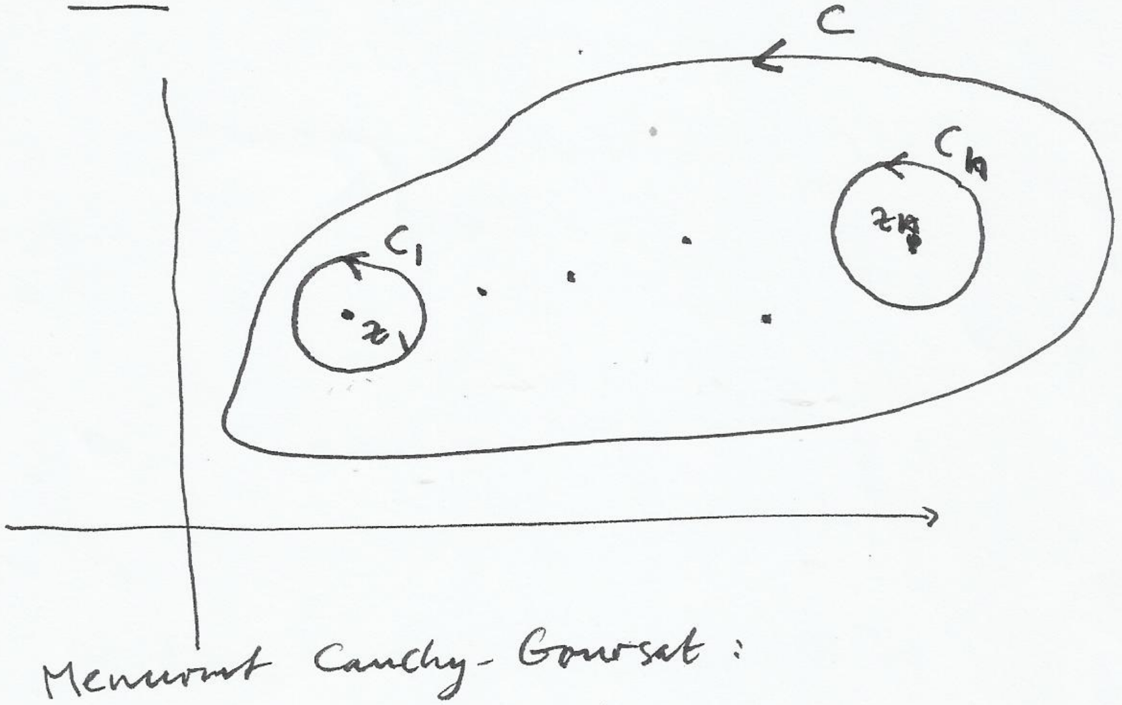
Teorema Residu Cauchy

Misalkan C adalah kontur tertutup sederhana berorientasi positip. Fungsi f analitik di dalam dan pada C kecuali di sejumlah hingga titik singular dari f $z_1, z_2, \ldots, z_n$ di dalam C.

Maka

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

<u>Bukti</u> :



Menurut Cauchy-Goursat :

$$\int_C f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = 0 \quad \text{.....(a)}$$

Dan berdasar definisi residu

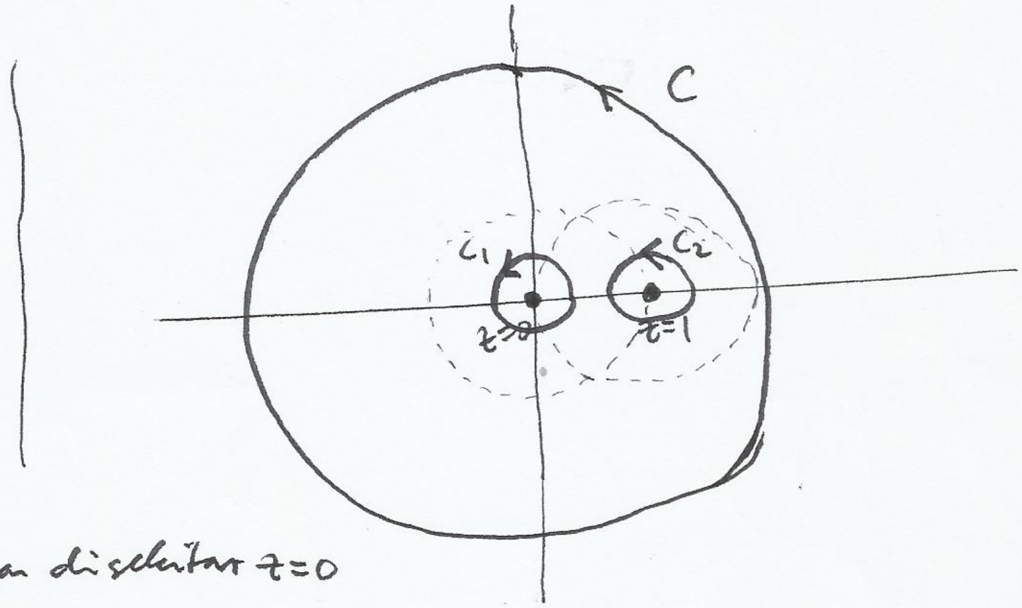
$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f \quad \text{---(b)}$$

Dari (a) & (b) teorema terbukti

Contoh : Dengan menggunakan teorema residu Cauchy, hitunglah

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz$$

dimana C adalah lingkaran berjari-jari 2 pusat di $z=0$ dan berorientasi positip.



Dideretkan di sekitar $z=0$

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z}\cdot\frac{1}{z-1} = \left(5-\frac{2}{z}\right)\cdot\left(\frac{-1}{1-z}\right)$$

$$= \left(5-\frac{2}{z}\right)\left(-1-z-z^2-\cdots\right) = \frac{2}{z}-3-3z-3z^2-\cdots$$

$$\int_{C_1} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f = 2\pi i\cdot 2 \quad \left(b_1 = 2,\ \text{koef dari } \tfrac{1}{z}\right)$$

Dideretkan di sekitar $z=1$

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5(z-1)+3}{z-1}\cdot\frac{1}{1+(z-1)} = \left(\frac{3}{z-1}+5\right)\left(1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right)$$

$$= \frac{3}{z-1}+2-2(z-1)+\cdots$$

$$\int_{C_2} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=1} f = 2\pi i\cdot 3 \quad \left(\text{koefisien } \tfrac{1}{z-1} \text{ adalah } 3\right)$$

Jadi $\displaystyle\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f + \operatorname*{Res}_{z=1} f \right)$

$$= 2\pi i\,(2+3)$$

$$= 10\pi i$$

<u>Residu di titik tak hingga</u>

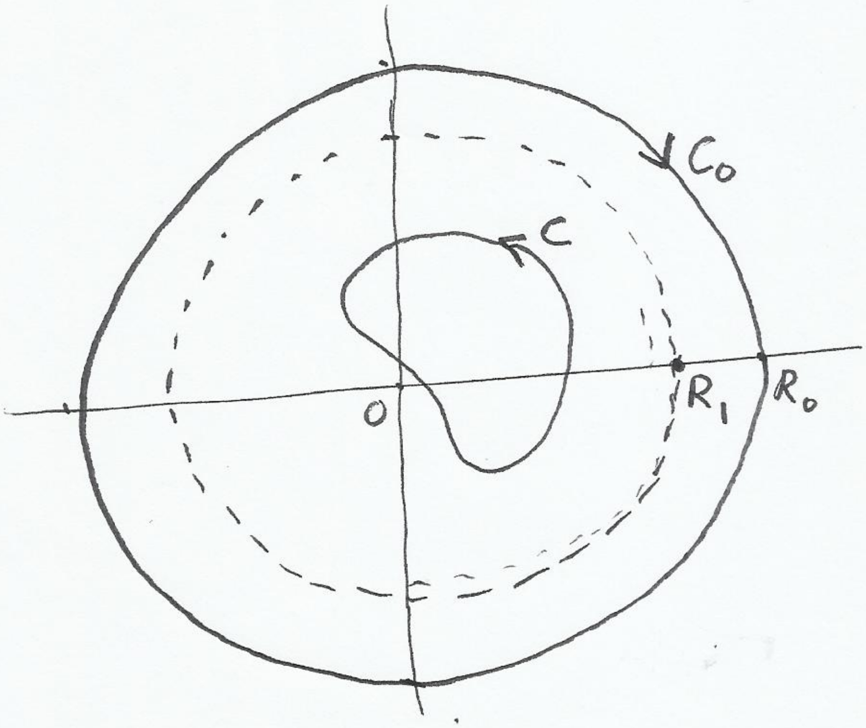
Misalkan f analitik diseluruh bidang kecuali pada ~~beberapa titik~~ sejumlah hingga titik singular didalam kurva tertutup sederhana C yg berorientasi positip. Misalkan pula, R_1 adalah suatu bilangan positip yg cukup besar sedemikian sehingga C terletak didalam lingkaran $|z| = R_1$ (yaitu lingkaran yg berpusat di $z=0$ dan jari-jari R_1). Tentu saja pada kondisi ini f juga analitik pada $\{z \mid R_1 < |z| < \infty\}$ dan menurut catatan 2 halaman II berarti titik di tak hingga ($z_0 = \infty$) merupakan titik singular terisolasi dari f.

Lebih lanjut, misalkan C_0 adalah kontur tertutup yg berupa lingkaran $|z| = R_0$ berorientasi <u>negatif</u> dengan $R_0 > R_1$.

Residu dari f di titik tak hingga didefinisikan sebagai berikut:

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) .$$

Lebih jelasnya perhatikan gambar berikut:



Kita dapat menganggap lingkaran C_0 tetap menjaga titik di takhingga berada disebelah kirinya. (~~di~~ titik takhingga sebagai titik singular ~~poin~~ pada bidang $|z| > R_0$)

Berdasarkan ~~Perhatikan~~ corollary halaman 159 (principle of deformation of paths) maka dapat ditulis

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{-C_0} f(z)\,dz = -\int_{C_0} f(z)\,dz \quad \text{-----} (*)$$

Sehingga dapat disimpulkan

$$\int_C f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\infty} f \quad \text{-----} (**)$$

Perhatikan penderetan Laurent dari f di domain $\{z \mid R_1 < |z| < \infty\}$. Yakni

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad \text{dengan } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

dimana $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$

Mengganti z dgn $\frac{1}{z}$ dan ~~maka~~ dikalikan dgn $\frac{1}{z^2}$ diperoleh :

$$\frac{1}{z^2}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n} \quad , \left(0<|z|<\frac{1}{R_1}\right)$$

Residu dari deret ini adalah c_{-1} ~~(yakni n=+1)~~ (yakni koefisien dari $\frac{1}{z}$ yaitu pada saat $n=1$),

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right] \text{ ---- (i)}$$

Dilain pihak (dari halaman VIII) saat $n=-1$ diperoleh

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_0} f(z)\,dz \text{ ---- (ii)}.$$

Gabungan (i) & (ii) didapat

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Memperhatikan (*) dan (**) halaman VIII didapat

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right] \text{ --- (A)}$$

dan selain itu dapat pula ditulis

$$\int_{C} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Pole (kutub)

Misalkan f mempunyai titik singular terisolasi z_0. Maka f dapat direpresentasikan ke dalam deret Laurent pada domain $\{z \mid 0<|z-z_0|<R_2\}$, yakni

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\underbrace{\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\cdots}_{\text{disebut bagian utama dari } f \text{ di titik } z_0.}$$

~~Misalkan~~ Jika bagian utama dari f hanya terdiri dari sejumlah ~~satu~~ berhingga suku yg tidak nol (dengan kata lain ada bilangan asli $m \geq 1$ sdm sdh $b_m \neq 0$ dan $b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots=0$) yakni penderetan Laurent dari f berbentuk

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}.$$

dengan $b_m \neq 0$ (koefisien yg lain bisa saja nol), maka titik singular terisolasi z_0 disebut <u>suatu pole (kutub) dengan orde m.</u>

Apabila $m=1$ dikatakan pole sederhana.

Namun ada kasus untuk domain $\{z \mid 0 < |z - z_0| < R_2\}$, bagian utama dari deret Laurent semua koefisiennya **nol**, yakni

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots.$$

Untuk kasus yg spt ini z_0 disebut <u>titik singular yg dapat dibuang</u> (removable singular point). Lebih lanjut residu f di z_0 sama dgn nol, dan apabila kita dapat <u>meredefinisi</u> nilai fungsi f di z_0 yakni $f(z_0)$ didefinisikan ulang sama dengan a_0, maka penderetan Laurent untuk f valid pada domain $\{z \mid |z - z_0| < R_2\}$

<u>Contoh</u> : $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$, maka $z = 0$ titik singular.

Titik singular ini dikatakan <u>dapat dibuang</u> sebab deret Laurent dari f disekitar $z = 0$ sbb:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots, \quad 0 < |z| < \infty.$$

Apabila didefinisikan ~~ulang~~ $f(0) = \frac{1}{2!}$, maka penderetan valid pada domain $\{z \mid |z| < \infty\}$.

Kasus berikutnya adalah apabila bagian utama dari f pada z_0 memuat tak berhingga banyak koefisien / suku yang tidak nol, sebagai contoh $f(z) = e^{1/z}$ yaitu deret Laurentnya berbentuk :

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots \quad , \quad 0 < |z| < \infty$$

maka pada kasus ~~ini~~ ini kita tidak mungkin dapat meredefinisi nilai $f(0)$.

Pada kasus demikian ini titik singular z_0 disebut titik singular yg esensial (essential singular point).

Residu pada pole

Teorema: Misalkan z_0 merupakan titik singular terisolasi dari fungsi f. Titik z_0 merupakan sebuah pole berorde m jika dan hanya jika fungsi f dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$$

dimana $\phi(z)$ analitik di z_0 dan $\phi(z_0) \neq 0$.

Lebih lanjut

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

dimana $\phi^{(m)}$ adalah turunan ke-n dari ϕ

dan $\phi^{(0)}(z_0) = \phi(z_0)$

bukti: hal 244 – 245.

Contoh 1: Fungsi $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+9}$ mempunyai titik singular terisolasi pada $z = 3i$ dan dapat dituliskan sbb:

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z-3i} \text{ dgn } \phi(z) = \frac{z+1}{z+3i}.$$

Tentu saja $\phi(z)$ analitik di $z = 3i$ dan $\cancel{\phi(3i)}$ $\phi(3i) = \frac{3i+1}{6i} \neq 0$. Karena $m=1$ maka residu dari f dititik $z = 3i$ adalah $\dfrac{\phi^{(0)}(3i)}{0!} = \phi(3i)$.

Catatan : syarat $\phi(z_0) \neq 0$ ini perlu dipenuhi sebab apabila tidak dipenuhi kita bisa berbuat kesalahan karena kecerobohan. Sebagai contoh kasus berikut ini.

Misalkan $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$. Kita tidak bisa mengaplikasikan teorema pada halaman XIII dengan menulis

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z^4}$$

, dgn $\phi(z) = \sinh z$ dan $m = 4$.

~~Sebab~~ Hal ini dikarenakan $\sinh z(0) = 0$

(ingat : $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$)

Dari halaman 94 atau halaman 241 diketahui deret taylor dari $\sinh z$ adalah :

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad |z| < \infty .$$

Shg $\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1/3!}{z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

Dgn demikian $z = 0$ merupakan pole dgn orde 3 dan $\operatorname*{Res}_{z=0} f = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

Nol dari fungsi analitik

ZEROS OF ~~FUNG~~ ANALYTIC FUNCTIONS

Misalkan f analitik di z_0, maka semua $f^{(n)}(z)$ ($f^{(n)}(z)$ adalah turunan ke-n dari f) $n = 1, 2, 3, \ldots$ juga analitik di z_0. Jika $f(z_0) = 0$ dan ada suatu bilangan asli m sdm shg berlaku

$$f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{dan } f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

maka dikatakan f mempunyai nol order m di titik z_0.

Teorema berikut menunjukkan karakteristik tentang nol order m.

Teorema: Misalkan f analitik di z_0.
Fungsi f mempunyai nol order m di z_0 jika dan hanya jika Ada fungsi analitik g dengan $g(z_0) \neq 0$ sdm shg f dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z).$$

Contoh: $f(z) = z(e^z - 1)$.

Maka $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2 \neq 0$.
Lebih langsung $f(z)$ dapat dituliskan sbb:

$$f(z) = (z-0)^2 g(z) \quad \text{dimana } g(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0. \end{cases}$$

claim bahwa g analitik dan $g(0)=1\neq 0$.
Dengan demikian f mempunyai nol orde 2 di titik $z=0$.

Nol dan kutub

Teorema i: Misalkan bahwa

(a) Fungsi p dan q masing² analitik di z_0.

(b) $p(z_0)\neq 0$ dan q mempunyai nol order m di z_0,

maka fungsi hasil bagi $\frac{p(z)}{q(z)}$ mempunyai kutub order m di z_0.

Teorema ii: Misalkan fungsi p dan q analitik di z_0.
Jika $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=0$ dan $q'(z_0)\neq 0$, maka z_0 merupakan kutub (pole) sederhana dari fungsi hasil bagi $\frac{p(z)}{q(z)}$ dan

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Contoh: $f(z)=\dfrac{z}{z^4+4}$ dengan $p(z)=z$ dan $q(z)=z^4+4$. ~~analitik~~

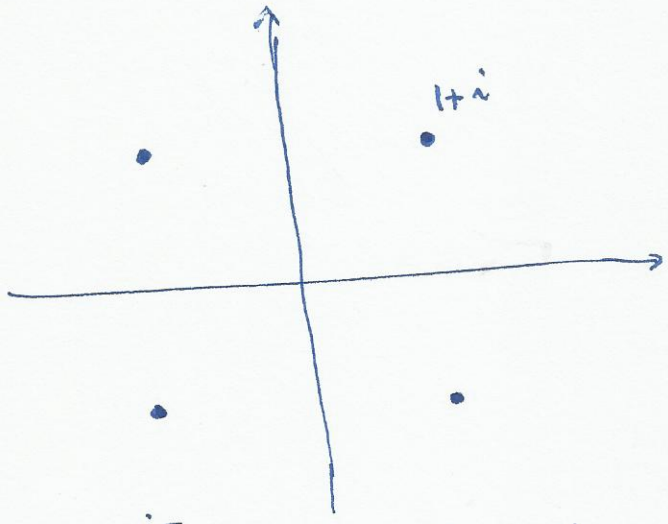
Titik $z_0=1+i$ adalah nol dari $q(z)$, p & q analitik di z_0.

$p(z_0)=p(1+i)=1+i\neq 0$, $q(z_0)=q(1+i)=(1+i)^4+4=0$

$q'(z_0)=4z_0^3=4(1+i)^3\neq 0$.

Jadi $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f = \dfrac{p(1+i)}{q'(1+i)} = \dfrac{1+i}{4(1+i)^3} = \dfrac{-i}{8}$.

Pembuat nol fungsi $q(z) = z^4 + 4$ adalah akar dari persamaan $z^4 + 4 = 0$ atau $z^4 = -4$ ~~atau~~ $\cancel{z = \sqrt[4]{-4}}$.



$$-4 = 4e^{i\pi} = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\arg(-4) = \pi + 2n\pi \quad , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$-4 = 4e^{i(\pi + 2n\pi)} \quad , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

jika $z = re^{i\theta}$, maka $z^4 = r^4 \cdot e^{i(4\theta)}$.

$$r^4 \cdot e^{i(4\theta)} = 4 \cdot e^{i(\pi + 2n\pi)}$$

$r = \sqrt[4]{4}$ dan $4\theta = \pi + 2n\pi$,

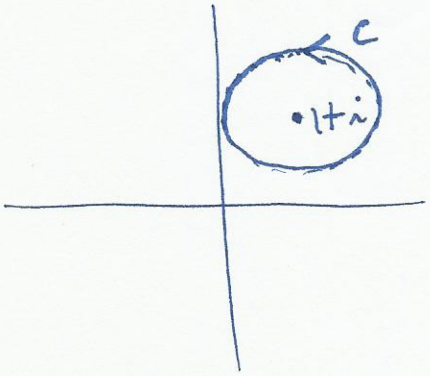
$r = \sqrt{2}$ dan $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}\pi$

$n = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1 + i$

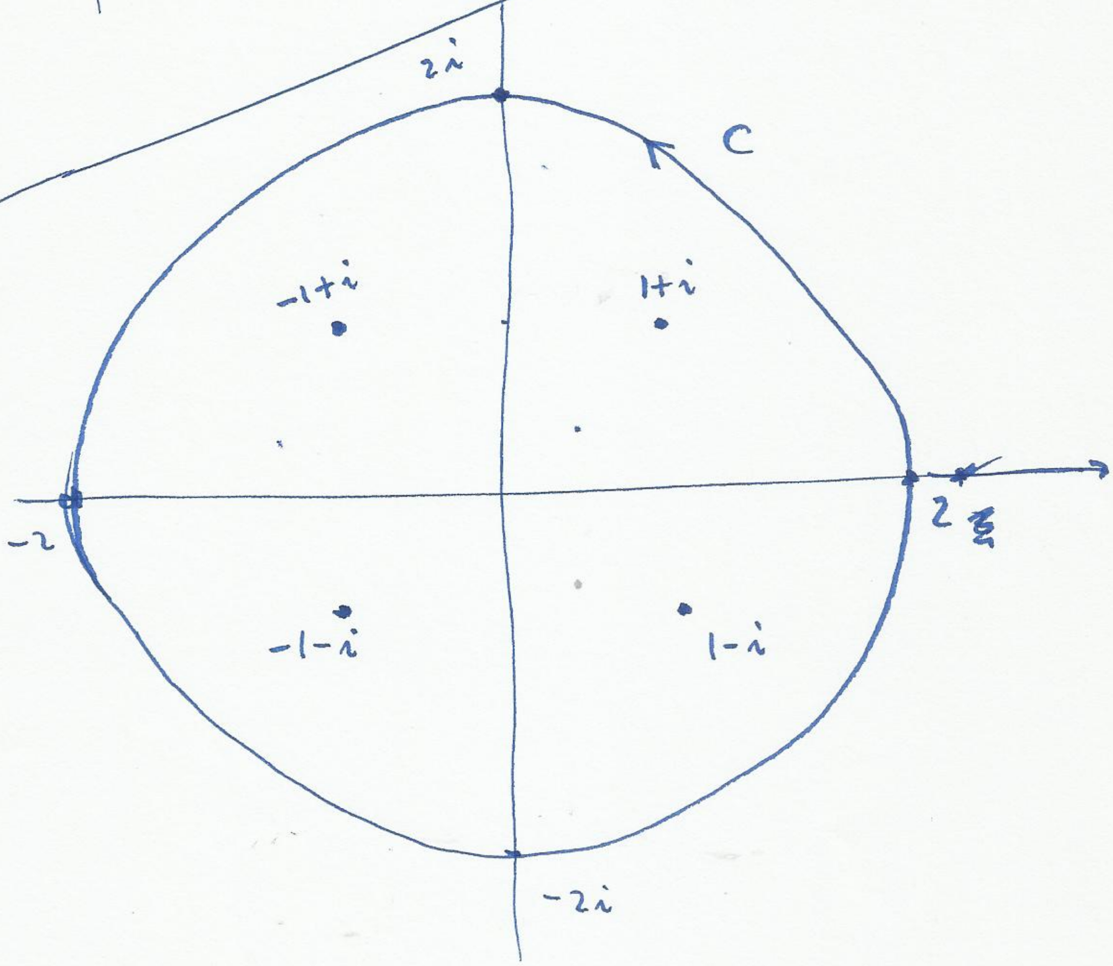
$n = 1 \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\,3\pi/4} = -1 + i$

$n = 2 \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \Longrightarrow z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\,5\pi/4} = -1 - i$

$n = 3 \rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} \Longrightarrow z_4 = \sqrt{2}\, e^{i\,7\pi/4} = 1 - i$



$$\int_C \frac{z}{z^4+4}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} f$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{-i}{8}$$
$$= \pi/4$$



$C : 2e^{i\theta}$

$$\int_C \frac{z}{z^4+4}\,dz = ?$$