Persamaan homogen

Persamaan diferensial orde satu $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ dikatakan homogen apabila persamaan tersebut dapat dimodifikasi (atau dituliskan) dalam bentuk $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$. Artinya $f(x,y)$ dapat diekspresikan sebagai fungsi dari rasio variabel y dan x, yakni $\frac{y}{x}$.

Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ selalu dapat diubah ke dalam bentuk persamaan diferensial yang dapat dipisah (separable) dengan transformasi $v = \frac{y}{x}$.

Dari transformasi $v = \frac{y}{x}$ atau $y = vx$ diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}\cdot x + v$. Akibatnya persamaan $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dv}{dx}\cdot x + v = F(v)$$

$$\frac{dv}{dx}x = F(v) - v$$

$$\frac{dv}{F(v)-v} = \frac{dx}{x} \quad \text{atau} \quad \frac{dv}{F(v)-v} - \frac{dx}{x} = 0$$

yang merupakan <u>separable equations</u>.

Contoh 1: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$ (nomor 31 hal 50).

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Transformasi $v = \frac{y}{x}$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot x + v$ didapat

$$\frac{dv}{dx} \cdot x + v = 1 + v + v^2$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = 1 + v^2$$

$$\int \frac{dv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\arctan v = \ln|x| + \ln|K|$$

$$\arctan v = \ln|K||x|$$

Sehingga solusi dari $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$ adalah

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|Kx|.$$

Contoh 2 : nomor 30 hal 49

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}.$$

Persamaan ini dapat dituliskan sbg

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left[\frac{y}{x} - 4\right]}{x\left[1 - \frac{y}{x}\right]} \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 4}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Ruas kanan sebagai fungsi dari $\frac{y}{x}$.

Persamaan diferensial eksak

Persamaan diferensial

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{atau}$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \;\text{----}\; (A)$$

dikatakan <u>eksak</u> apabila ada fungsi dua variabel $\psi(x,y)$ yang memenuhi sifat $\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y)$ dan $\frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y)$.

Notasi $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ adalah turunan parsial fungsi ψ terhadap variabel x yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{\psi(x+h,y)-\psi(x,y)}{h}$$

Contoh : $\psi(x,y) = x^2y^3$, maka $\psi(x+h,y) = (x+h)^2 \cdot y^3$

sehingga
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2\cdot y^3 - x^2y^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2y^3 + 2xhy^3 + h^2y^3 - x^2y^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2xy^3 + hy^3$$

$$= 2xy^3$$

Secara teknis untuk menghitung $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ dapat dilakukan dengan cara menurunkan fungsi ψ terhadap variabel x secara biasa dgn memandang variabel y sebagai konstanta.

Sebagai contoh $\psi(x,y) = 4x^2 \sin y + 3y^2$, maka $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 8x \sin y + 0$.

Sedangkan notasi $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ didefinisikan

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{\psi(x, y+k) - \psi(x,y)}{k},$$

dan untuk menghitung $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ dapat dilakukan dengan cara menurunkan fungsi ψ terhadap variabel y secara biasa dengan memandang variabel x sebagai konstanta.

Contoh : $\psi(x,y) = 2y \sin(xy) + xy^2 + x^3$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y \cdot \cos(xy) \cdot x + 2 \sin(xy) + 2xy + 0$$

Perhatikan persamaan diferensial berikut (hal 94 contoh 1) : $2x+y^2+2xyy'=0$ atau dapat dituliskan sbg $(2x+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

Bila dikaitkan dengan persamaan (A) halaman (3), maka dapat ditulis

$$M(x,y) = 2x+y^2 \quad \text{dan} \quad N(x,y) = 2xy.$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan <u>eksak</u> sebab <u>ada</u> fungsi $\psi(x,y) = x^2 + xy^2$ dan memenuhi syarat $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x+y^2 = M(x,y)$ serta

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy = N(x,y).$$

Yang merupakan "masalah" adalah DARIMANA DATANGNYA FUNGSI $\psi(x,y) = x^2+xy^2$ TERSEBUT ?

Bisa saja "WANGSIT" ....

Lebih jauh lagi, apakah persamaan

$(2x+3)+(2y-2)y'=0$ eksak ?

Demikian juga apakah $(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$ merupakan persamaan eksak ?

Selanjutnya akan dicari fungsi $\psi(x,y)$ yang memenuhi sifat a) $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$ dan b) $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$.
Kalau kita mengacu pada sifat a) maka

$$\psi = \int M \, \partial x + h(y) \quad \cdots c)$$

(Karena anti derivatifnya secara parsial thd maka variabel y dipandang sebagai konstanta, sehingga konstanta pengintegralannya dapat dituliskan sebagai fungsi dari variabel y, sebut h(y).)
Dengan demikian ψ dapat diperoleh apabila h(y) dapat ditentukan/dicari.

Dari sifat b)

$$N = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M \, \partial x + \frac{\partial h}{\partial y} \quad \cdots d)$$

Catatan : 1.) $\frac{\partial}{\partial y} \int M \, \partial x = \int \frac{\partial M}{\partial y} \, \partial x$

2) Karena h hanya merupakan fungsi satu variabel yakni y maka $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{dh}{dy}$ yaitu turunan biasa h terhadap variabel y.

Bentuk d) dapat dituliskan sbg

$$\frac{\partial h}{\partial y} = N - \frac{\partial}{\partial y} \int M \, \partial x \quad \text{atau}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \, \partial x \quad \cdots e)$$

Dari e) didapat

$$h(y) = \int \left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \partial x \right) \partial y \quad \cdots\cdots f).$$

Dengan demikian bentuk $h(y)$ ditentukan oleh $N - \int \frac{\partial M}{\partial y} \partial x \quad \cdots\cdots g).$

Apabila bentuk g) hanya bergantung pada variabel y saja tanpa mengandung variabel x atau dengan kata lain g) merupakan fungsi dari variabel y saja, maka $h(y)$ dapat ditentukan / dihitung. Ini berarti bahwa fungsi $\psi(x,y)$ dapat ditemukan dan sekaligus memenuhi sifat a) dan b) yakni $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$. Dengan kata lain persamaan diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ merupakan persamaan diferensial <u>eksak</u>.

Kemungkinan lain bahwa g) juga bergantung pada variabel x. Jika hal ini terjadi maka $h(y)$ tidak dapat ditentukan atau bentuk f) tidak terpenuhi. Kesimpulan yang dapat diambil adalah bahwa persamaan diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ <u>bukan</u> persamaan eksak.

Proses di atas bertumpu pada persamaan a) terlebih dahulu. Secara analog dapat pula dilakukan proses serupa dengan bertumpu pada persamaan b) terlebih dahulu.

Dari persamaan b) didapat

$\psi(x,y) = \int N\,\partial y + g(x)$, sehingga ~~dari a) diperoleh persamaan~~

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N\,\partial y + \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad \text{atau}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\partial y + \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad \text{---- h).}$$

Menggabungkan a) dengan h) diperoleh

$$M = \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\partial y + \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = M - \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\partial y \quad \text{---- i)}$$

Apabila ruas kanan i) hanya bergantung pada variabel x saja, maka $g(x)$ dapat dihitung. Dengan demikian $\psi(x,y)$ dapat ditemukan dan persamaan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ eksak. Dan sebaliknya apabila ruas kanan dari i) memuat variabel y maka persamaan i) tidak terpenuhi, sehingga persamaan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ tidak eksak.

Kalau kita cermati eksak tidaknya persamaan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ bergantung pada persamaan i) dan e) yakni

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = M - \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\partial y \quad \text{dan}$$

$$\frac{\partial h(y)}{\partial y} = N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,\partial x \,.$$

Apabila kedua ruas dari i) diturunkan parsial terhadap y dan e) terhadap x, maka didapat

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(M - \int \frac{\partial N}{\partial x}\,\partial y\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \cdots\cdots j)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,\partial x\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad \cdots\cdots k)$$

Bisa kita lihat, apabila dipenuhi $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ maka didapat $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0$ dan juga $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\frac{\partial g}{\partial x}$ hanya bergantung pada variabel x saja, demikian juga $\frac{\partial h}{\partial y}$ hanya bergantung pada variabel y saja.

Jadi $g(x)$ dan $h(y)$ dapat dihitung sehingga $\psi(x,y)$ dapat ditemukan, dgn kata lain persamaan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ eksak.

Dari rincian di atas dapat disimpulkan bahwa

$$\boxed{\text{jika } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ maka } M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \text{ eksak}}$$

ditambahkan kondisi

Misalkan diketahui $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$, M dan N merupakan fungsi-fungsi yang kontinu, dan persamaan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ eksak.

Artinya ada fungsi $\psi(x,y)$ yang memenuhi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \text{ dan } \frac{\partial \psi}{\partial y} = N \text{, sehingga berlaku}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y}$ dan $\frac{\partial N}{\partial x}$ kontinu, maka $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$ dan $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$ juga kontinu dan ini mengakibatkan

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}.$$

Jadi berlaku $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Dapat disimpulkan:

$$\boxed{\text{jika } M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \text{ eksak maka } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Dari halaman 10 dapat disimpulkan

"Apabila $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ dan $\frac{\partial N}{\partial x}$ semuanya kontinu, maka persamaan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ merupakan persamaan eksak bila dan hanya bila $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$".
(Teorema 2.6.1 halaman 95)

Dengan demikian kita bisa menjawab soal yang ada pada halaman 5 yakni persamaan $(2x+3) + (2y-2)y' = 0$ adalah persamaan eksak sebab: Misalkan $2x+3 = M$ dan $(2y-2) = N$ maka $\frac{\partial M}{\partial y} = 0$ dan juga $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$ sehingga

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sedangkan pertanyaan yang lain dari halaman 5 yaitu persamaan $(2x+4y) + (2x-2y)y' = 0$ apakah eksak? Jawabannya adalah <u>tidak</u>, sebab: Misalkan $2x+4y = M$ dan $(2x-2y) = N$, maka $\frac{\partial M}{\partial y} = 4$ dan $\frac{\partial N}{\partial x} = 2$. Dengan demikian $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

Solusi dari persamaan eksak

Misalkan persamaan diferensial

$$M(x,y)\cancel{dx} + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{atau}$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

merupakan persamaan diferensial eksak.

Maka ada (dapat ditemukan) sebuah fungsi $\psi(x,y)$ yang memenuhi $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$.

Berdasarkan sifat turunan fungsi dua variabel dapat ditulis

$$\frac{d\psi(x,y)}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \text{atau}$$

~~Karena eksak maka dapat ditulis~~

$$\frac{d\psi}{dx} = M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}\ , \quad \text{sehingga}$$

didapat $\frac{d\psi}{dx} = 0$ atau $\psi(x,y) = c$ dengan c adalah sebarang konstanta.

Jadi dapat disimpulkan bahwa solusi dari $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ adalah $\psi(x,y) = c$ dimana c adalah sebarang konstanta.

Contoh : (contoh 2 halaman 97)

Selesaikan persamaan diferensial

$$(y\cos x + 2xe^{y}) + (\sin x + x^2e^{y} - 1)\,y' = 0 \;\cdots\cdots k)$$

Kita misalkan $y\cos x + 2xe^{y} = M$ dan $\sin x + x^2e^{y} - 1 = N$,

maka $\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^{y}$ dan $\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^{y}$.

Jadi $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Dengan kata lain k) merupakan persamaan eksak yang artinya ada fungsi $\psi(x,y)$ yang bersifat $\frac{\partial \psi}{\partial x} = y\cos x + 2xe^{y}$ dan $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sin x + x^2e^{y} - 1$.

Sehingga diperoleh $\psi = \int (y\cos x + 2xe^{y})\,\partial x + h(y)$.

$$\psi = y\sin x + x^2e^{y} + h(y).$$

Diturunkan parsial terhadap y diperoleh

$$\cancel{\psi_y =} \; \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sin x + x^2e^{y} + \frac{dh}{dy}.$$

Dibandingkan dengan persamaan diatas didapat

$$\frac{dh}{dy} = -1, \quad \text{Sehingga } h(y) = -y.$$

Jadi fungsi ψ yang bersifat $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$ dan $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$

adalah $\psi(x,y) = y\sin x + x^2e^{y} - y$.

Dengan demikian solusi dari k) secara implisit dapat ditulis ~~dan~~ seperti berikut

$$y\sin x + e^{y}x^2 - y = C, \text{ dimana}$$

C adalah sebarang konstanta.

Faktor pengintegralan (integrating factor)

Perhatikan persamaan diferensial berikut

$$(3xy+y^2)\,dx + (x^2+xy)\,dy = 0 \quad \text{------} \; l).$$

Persamaan l) tidak eksak sebab :

Apabila dimisalkan $3xy+y^2 = M$ dan $x^2+xy = N$, maka diperoleh $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x+2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x+y$.

Namun apabila persamaan l) dikalikan dengan faktor x maka persamaan l) menjadi

$$(3x^2y+xy^2)\,dx + (x^3+x^2y)\,dy = 0 \quad \text{----} \; m).$$

Bila kita misalkan $3x^2y+xy^2 = M_1$ dan $x^3+x^2y = N_1$

maka $\frac{\partial M_1}{\partial y} = 3x^2+2xy$ dan $\frac{\partial N_1}{\partial x} = 3x^2+2xy$.

Karena $\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}$ maka persamaan m) merupakan persamaan diferensial eksak.

Dengan demikian dapat dilihat bahwa persamaan l) yang tadinya merupakan persamaan yg <u>tidak eksak</u>, namun setelah dikalikan dengan x menjadi persamaan m) yang <u>eksak</u>.

Faktor x tersebut dinamakan faktor pengintegralan (integrating faktor) dari persamaan l).

Secara umum apabila persamaan

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ yang tidak eksak dan apabila kedua ruas dikalikan dengan $\mu(x,y)$ dan mengakibatkan persamaan

$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$ merupakan persamaan eksak maka $\mu(x,y)$ disebut faktor pengintegralan dari persamaan $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$.

Selanjutnya bagaimana cara mencari atau menentukan faktor pengintegralan dari suatu persamaan diferensial (yang tidak eksak)?

Misalkan persamaan diferensial

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0 \quad \text{eksak.}$$

Maka berlaku $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ atau

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{----n).}$$

Secara general ~~apabila~~ untuk mendapatkan fungsi μ maka kita harus menyelesaikan atau mencari solusi dari persamaan n).

Untuk penyederhanaan kita tinjau ~~dua~~ tiga kasus yakni:

<u>Kasus (i)</u> : Memisalkan μ hanya ~~bergantung~~ merupakan fungsi dari variabel x saja.

Pada kasus ini, maka persamaan n) menjadi sederhana sebab $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, sehingga persamaan n) menjadi

$$\mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{atau}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{atau}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} \right) \mu = 0 \text{ ---- o)}$$

Persamaan o) dapat diselesaikan untuk μ apabila bentuk $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ hanya ~~tergantung~~ merupakan fungsi dari variabel x saja.

<u>Kasus (ii)</u> : Memisalkan μ hanya merupakan fungsi satu variabel y saja.

Untuk kasus ini, persamaan n) menjadi:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} \cdot \left(\text{sebab } \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \right)$$

atau $$\frac{\partial \mu}{\partial y} + \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} \right) \mu = 0 \text{ ---- p)}$$

Persamaan p) dapat diselesaikan untuk μ apabila bentuk

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

hanya merupakan fungsi dari variabel y saja.

Sedangkan untuk kasus ke 3 yakni μ merupakan fungsi dari dua variabel x dan y ~~tida~~ <u>tidak dibahas</u> pada kesempatan ini.

Contoh : Perhatikan persamaan diferensial

$$(3y^2+2xy)dx - (x^2+2xy)dy = 0 \quad \text{----} \; q).$$

Misalkan $3y^2+2xy = M$ dan $-(x^2+2xy) = N$, maka

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y+2x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -(2x+2y).$$

Jadi persamaan q) tidak eksak.

Akan dicari faktor integral dari persamaan q) yaitu dengan cara memisalkan μ hanya merupakan fungsi dari satu variabel x saja. Mengacu persamaan o) pada halaman 16 maka diperoleh persamaan

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{-(2x+2y)-(6y+2x)}{-(x^2+2xy)} \right) \mu = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{4}{x}\mu = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial \mu}{\partial x}} \; \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{-4\,\partial x}{x}$$

$$\ln \mu = -4 \ln x = \ln x^{-4}$$

sehingga diperoleh $\mu = x^{-4}$.

Dengan demikian persamaan

$$x^{-4}(3y^2+2xy)\,dx - x^{-4}(x^2+2xy)\,dy = 0 \quad \text{----} \; r).$$

merupakan persamaan eksak (CEK!)

Selanjutnya akan diselesaikan persamaan r) yakni $(3y^2x^{-4}+2x^{-3}y)\,dx - (x^{-2}+2x^{-3}y)\,dy = 0$.

Misalkan $3y^2x^{-4}+2x^{-3}y = M_1$ dan $-(x^{-2}+2x^{-3}y) = N_1$.

Karena r) eksak maka ada sebuah fungsi ψ yang bersifat $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M_1$ dan $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N_1$.

Dari persamaan $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M_1$ diperoleh

$$\psi = \int M_1 \partial x + g(x)$$

$$= \int (3y^2x^{-4} + 2x^{-3}y)\, \partial x + g(x)$$

$$= -y^2x^{-3} - x^{-2}y + g(x).$$

Diturunkan parsial terhadap y didapat

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2yx^{-3} - x^{-2} + \frac{dg}{dx}.$$

Dilain pihak $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N_1 = -(x^{-2}+2x^{-3}y)$.

Jadi disimpulkan $\frac{dg}{dx} = 0$ atau $g(x) = k$, dengan k sebarang konstanta.

Dengan demikian ψ berbentuk

$$\psi(x,y) = -y^2x^{-3} - x^{-2}y + k.$$

Solusi dari persamaan r) juga merupakan solusi dari persamaan q) yaitu $\psi(x,y) = c$

$$-y^2x^{-3} - x^{-2}y + k = c$$

$$y^2x^{-3} + x^{-2}y = k - c \quad \text{atau}$$

$$y^2x^{-3} + x^{-2}y = c_1 \quad \text{dengan } c_1 = k - c.$$

Persamaan diferensial (PD) orde 2 dengan koefisien konstanta

Bentuk umum : $ay'' + by' + cy = f(t)$, $y' = \frac{dy}{dt}$

Kasus (i) : $f(t) = 0$ (homogen)

PD menjadi $ay'' + by' + cy = 0$ .... (A).

Akan diselidiki apakah PD (A) mempunyai solusi yang berbentuk $y = e^{\lambda t}$?

Diturunkan terhadap t didapat $y' = \lambda e^{\lambda t}$ dan $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Mensubstitusikan y, y' dan y'' ke (A) diperoleh $e^{\lambda t}[a\lambda^2 + b\lambda + c] = 0$, atau

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{....} \quad (B).$$

<u>Kesimpulan</u> : PD (A) mempunyai solusi berbentuk $y = e^{\lambda_1 t}$ jika dan hanya jika λ_1 merupakan akar dari persamaan (B).

Selanjutnya, persamaan (B) disebut persamaan karakteristik dari persamaan (A).

Karena (A) merupakan persamaan kuadrat, maka ada tiga jenis akar yang mungkin yakni
1) akarnya riel berbeda
2) akarnya riel sama (kembar)
3) akarnya kompleks.

Persamaan diferensial linier orde 2 dengan koefisien konstanta

Bentuk umum : $ay'' + by' + cy = f(t)$. - - - - (A)

Kasus (i) : $f(t) = 0$. (homogen)

Persamaan (A) menjadi $ay'' + by' + cy = 0$. - - - (B)

Akan diselidiki apakah ~~Misalkan solusinya berbentuk~~ bentuk $y = e^{\lambda x}$ merupakan solusi dari (B)? Apabila diturunkan terhadap x maka diperoleh ~~Sehingga~~ $y' = \lambda e^{\lambda x}$ dan $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Selanjutnya bentuk² tsb ~~apabila~~ disubstitusikan ke (B) didapat

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}\left[a\lambda^2 + b\lambda + c\right] = 0 \quad \text{atau}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{- - - - (C)}$$

Kesimpulan : $y = e^{\lambda_1 x}$ merupakan solusi dari (B) jika dan hanya jika λ_1 merupakan akar (solusi) dari (C).

Selanjutnya persamaan (C) disebut persamaan karakteristik dari persamaan (B).

Solusi dari (B) bergantung pada akar/solusi dari (C) yang merupakan persamaan kuadrat (dalam λ). Karena (C) merupakan kuadrat maka hanya ada tiga kemungkinan ~~dari~~ akar² dari persamaan (C) yakni

1) mempunyai akar riel yang berbeda
2) mempunyai akar riel yg sama (akar kembar)
3) mempunyai akar kompleks.

Dengan demikian solusi dari PD (A) dipengaruhi oleh jenis akar dari persamaan (B).

Selanjutnya akan dibicarakan per kasus, namun hanya dengan contoh.

Kasus 1) : akarnya riel berbeda

<u>Contoh 1)</u> : Diberikan PD $y'' + 3y' + 2y = 0$ ....1).

Persamaan karakteristik dari 1) adalah

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, sehingga didapat 2 akar riel berbeda yakni $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Jadi solusi dari PD 1) adalah $y_1 = e^{-2t}$ dan $y_2 = e^{-t}$. Namun perlu diketahui bahwa kombinasi linier dari 2 solusi tersebut juga merupakan <u>solusi</u> yakni (CEK!!)

$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ dengan c_1, c_2 sebarang konstanta. Solusi ini disebut solusi umum dari persamaan 1).

<u>Kasus 2) : akarnya riel sama</u>

Contoh 2) : Diberikan PD $y'' + 6y' + 9y = 0$ ....2)

Persamaan karakteristik dari 2) adalah

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ atau $(\lambda + 3)^2 = 0$

Jadi akarnya $\lambda = -3$.

Selanjutnya akan dibicarakan per kasus dengan menggunakan contoh.

Kasus 1) : mempunyai akar riel yang berbeda

Contoh 1) : $y'' + 3y' + 2y = 0$ ---- 1).

Akar karakteristiknya $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, sehingga didapat akar²nya $\lambda_1 = -2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Jadi $y_1 = e^{-2x}$ dan $y_2 = e^{-x}$ merupakan solusi dari contoh 1).

Perlu diketahui bahwa kombinasi linier dari kedua solusi tsb yakni

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

dengan c_1 dan c_2 sebarang konstanta, juga merupakan solusi dari 1) dan disebut solusi umum dari persamaan 1).

Kasus 2) : mempunyai akar riel yang sama (kembar).

Contoh 2) : $y'' + 4y' + 4y = 0$ --- 2).

Jadi solusinya $y_1 = e^{-3t}$.

Akan dicari solusi lain yang berbentuk $y = v_1(t) \cdot e^{-3t}$.

Diturunkan terhadap t didapat

$$y' = v_1'(t)e^{-3t} - 3v_1(t)e^{-3t} \quad \text{dan}$$

$$y'' = v_1''(t)e^{-3t} - 3v_1'(t)e^{-3t} - 3v_1'(t)e^{-3t} + 9v_1(t)e^{-3t}.$$

Mensubstitusikan y, y' dan y'' ke dalam persamaan 2) menghasilkan $v_1''(t)e^{-3t} = 0$ atau $v_1''(t) = 0$.

Sehingga $v_1(t) = At + B$.

Dengan memilih $A = 1$, $B = 0$, maka $v_1(t) = t$.

Maka solusi yang lain berbentuk $y = te^{-3t}$.

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa

$y = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$ juga merupakan solusi (CEK!!).

<u>Kasus 3) : akarnya kompleks</u>

Contoh 3) : Diberikan persamaan diferensial

$$y'' + y' + y = 0 \quad \text{.....} \; 3)$$

Persamaan karakteristiknya $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Akar-akarnya $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$ dan $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i$.

Jadi solusi umumnya

$$y = c_1 e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i)t} + c_2 e^{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i)t} \quad \text{....} \; 4)$$

atau

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}\, it} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\, it}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\left[c_1 e^{\frac{1}{2}\sqrt{3}\, it} + c_2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\, it}\right] \quad \text{....} \; 4)$$

Bentuk 4) secara umum merupakan fungsi bernilai kompleks (bahkan c_1 dan c_2 pun dapat diperluas bernilai kompleks).

Namun dengan menggunakan formula (rumus) EULER yakni $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, dan memilih nilai c_1 dan c_2 kita bisa mendapat fungsi bernilai riel dari bentuk 4).

Dengan formula Euler kita bisa menuliskan persamaan 4) ke dalam bentuk

$$y = e^{-\frac{1}{2}t}\left[(c_1+c_2)\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t + i(c_1-c_2)\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t\right].$$

Pilih $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, maka didapat $y = e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t$, dan apabila dipilih $c_1 = -\frac{1}{2}i$ dan $c_2 = \frac{1}{2}i$ maka didapat fungsi riel $y = e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t$.

Seperti kasus yang lain kita dapat menunjukkan bahwa

$$y = k_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cos\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t + k_2 e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,t \quad \text{---- 5)}$$

dengan k_1, k_2 sebarang konstanta riel juga merupakan solusi dari persamaan 3).

Selanjutnya bentuk 5) ~~disebut~~ disebut solusi umum dari persamaan 3).

Kasus (ii) : $f(t) \neq 0$ (non homogen).
Untuk kasus ini didiskusikan melalui contoh.

Contoh 4) : $y'' + 3y' + 2y = e^t$ (lihat contoh 1)).
Tentu saja $y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$ bukan merupakan solusi dari contoh 4). Namun solusi dari persamaan homogennya tersebut akan kita gunakan sebagai dasar mencari solusi contoh 4) dengan metode yang disebut <u>metode variasi parameter</u>. Prosesnya sbb :

1) Misalkan solusinya berbentuk
$$y = v_1(t) e^{-2t} + v_2(t) e^{-t}$$
(mengapa metode ini disebut variasi parameter, karena kita memvariasikan parameter c_1 dan c_2 menjadi fungsi $v_1(t)$ dan $v_2(t)$).

2) Menurunkan y terhadap t, didapat
$$y' = v_1'(t) e^{-2t} - 2v_1(t) e^{-2t} + v_2'(t) e^{-t} - v_2(t) e^{-t}.$$

3) Tetapkan $v_1'(t) e^{-2t} + v_2'(t) e^{-t} = 0$.
(Langkah ini yang disebut TRIK!!)
sehingga y' menjadi $y' = -2v_1(t) e^{-2t} - v_2(t) e^{-t}$

4) Menghitung y'' yakni

$$y'' = -2v_1'(t)e^{-2t} + 4v_1(t)e^{-2t} - v_2'(t)e^{-t} + v_2(t)e^{-t}$$

5) Mensubstitusikan y, y' (pada langkah 3) dan y'' ke dalam contoh 4) didapat

$$-2v_1'(t)e^{-2t} - v_2'(t)e^{-t} = e^{t}$$

6) Menggabungkan 3) dan 5) diperoleh sistem persamaan dalam $v_1'(t)$ dan $v_2'(t)$:

$$v_1'(t)e^{-2t} + v_2'(t)e^{-t} = 0$$

$$-2e^{-2t}\cdot v_1'(t) - e^{-t}v_2'(t) = e^{t}$$

Diselesaikan untuk $v_1'(t)$ dan $v_2'(t)$ didapat

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{-1}{e^{-3t}} = -e^{3t}$$

$$v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & e^{t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-t}}{e^{-3t}} = e^{2t}$$

Selanjutnya

$$v_1(t) = \int -e^{3t}\,dt = -\tfrac{1}{3}e^{3t} + k_1$$

$$v_2(t) = \int e^{2t}\,dt = \tfrac{1}{2}e^{2t} + k_2$$

7) Solusinya

$$y = \left(-\tfrac{1}{3}e^{3t} + k_1\right)e^{-2t} + \left(\tfrac{1}{2}e^{2t} + k_2\right)e^{-t}$$

$$y = -\tfrac{1}{3}e^{t} + \tfrac{1}{2}e^{t} + k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}$$

$$y = \tfrac{1}{6}e^{t} + \underbrace{k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}}$$

Dua suku terakhir merupakan solusi dari bentuk homogen contoh 4) yaitu persamaan $y'' + 3y' + 2y = 0$.

Kalau kita pilih $k_1 = k_2 = 0$, maka didapat solusi khusus yakni $y = \frac{1}{6}e^{t}$. Jika ini diberi nama $y_p = \frac{1}{6}e^{t}$ dan ~~ada~~ solusi ~~maka~~ homogennya diberi nama y_c maka solusi dari contoh 4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = y_p + y_c$$

dimana y_p solusi khusus dan y_c solusi dari bentuk homogennya.

Dari dua kasus di depan (homogen dan nonhomogen) dapat dilihat bahwa solusi umum yang didapat merupakan "kumpulan" dari solusi-solusi yang tak terhingga banyaknya (karena memuat dua buah konstanta sebarang c_1 dan c_2).

Setiap pemilihan nilai c_1 dan c_2 maka didapat satu solusi yang unik/tunggal (yang disebut solusi ~~khusus~~ spesifik), demikian sebaliknya kita dapat menentukan nilai c_1 dan c_2 dengan cara memberikan syarat awal pada persamaan diferensial tsb. Karena ada dua sebarang konstanta yaitu c_1 dan c_2 maka untuk menentukan nilai c_1 dan c_2 secara tunggal dibutuh dua buah syarat awal pada PD yakni

$$y(0) = \alpha \text{ dan } y'(0) = \beta.$$

Sebagai contoh pada persamaan 4) ditambahkan syarat awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$, maka didapat ~~fitas~~ persamaan

$$y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad \text{---- 5)}$$

Bentuk diatas disebut dengan <u>masalah nilai awal</u> (Initial value problems).

Solusi umum dari persamaan 4) adalah

$$y = \frac{1}{6}e^{t} + k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}$$ (dalam hal ini konstanta sebarangnya disimbulkan dengan k_1 dan k_2 sebagai ganti c_1 dan c_2).

Syarat awal yang pertama yaitu $y(0)=1$, ~~artinya adalah~~ apabila dikenakan pada solusi umum: ~~diperoleh~~ mempunyai arti $y=1$ saat $t=0$. ~~Ini mengakibatkan~~ Sehingga dapat ditulis

$$1 = \frac{1}{6} + k_1 + k_2 \quad \text{atau} \quad k_1 + k_2 = \frac{5}{6} \quad \text{--- 6)}$$

Syarat awal yang kedua yaitu $y'(0)=0$, ini bermakna bahwa pada saat $t=0$, maka nilai y'nya sama dengan 0 (nol). Dengan demikian perlu dicari dulu y', dengan cara menurunkan y terhadap t.

Hasilnya $y' = \frac{1}{6}e^{t} - 2k_1 e^{-2t} - k_2 e^{-t}$.

Sehingga diperoleh ~~bentuk~~ persamaan

$$0 = \frac{1}{6} - 2k_1 - k_2 \quad \text{atau}$$

$$k_1 + 2k_2 = \frac{1}{6} \quad \text{---- 7)}$$

Menyelesaikan persamaan 6) dan 7) diperoleh nilai $k_1 = \frac{3}{2}$ dan $k_2 = -\frac{2}{3}$.

Jadi didapat solusi $y = \frac{1}{6}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t}$.

Selanjutnya dibahas contoh persamaan nonhomogen yang mana persamaan homogennya mempunyai persamaan karakteristik dengan akar²nya sama/kembar.

Contoh 5) : $y'' + 6y' + 9y = t$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = -1$.

Pertama dicari dulu solusi umumnya dengan metode variasi parameter yakni memisalkan $y = v_1(t)\, e^{-3t} + v_2(t) \cdot t\, e^{-3t}$. Berikutnya dihitung y' ~~yaitu~~ $y' = v_1'(t) e^{-3t} - 3 v_1(t) e^{-3t} + v_2'(t) \cdot t e^{-3t}$

$$+ v_2(t) \left(e^{-3t} - 3te^{-3t} \right).$$

Tetapkan $v_1'(t)\, e^{-3t} + v_2'(t)\, t \cdot e^{-3t} = 0$; ...... *)

y' baru menjadi $y' = -3v_1(t) e^{-3t} + v_2(t) \left(e^{-3t} - 3te^{-3t} \right)$.

Sehingga $y'' = -3v_1'(t) e^{-3t} + 9 v_1(t) e^{-3t} + v_2'(t) \left(e^{-3t} - 3te^{-3t} \right)$

$$+ v_2(t) \left(e^{-3t} - 3e^{-3t} + 9te^{-3t} \right).$$

Mensubstitusikan y, y' dan y'' ke dalam contoh 5) diperoleh

$$-3v_1'(t) e^{-3t} + v_2'(t) \left(e^{-3t} - 3te^{-3t} \right) = t \quad --- **)$$

Menggabungkan *) dan **) diperoleh sistem persamaan

$$e^{-3t}\, v_1'(t) + t \cdot e^{-3t}\, v_2'(t) = 0$$
$$-3e^{-3t}\, v_1'(t) + \left(e^{-3t} - 3te^{-3t} \right) v_2'(t) = t$$

Diselesaikan untuk $v_1'(t)$ dan $v_2'(t)$ didapat

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & te^{-3t} \\ t & e^{-3t}-3te^{-3t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ -3e^{-3t} & e^{-3t}-3te^{-3t} \end{vmatrix}} = \frac{-t^2e^{-3t}}{e^{-6t}} = -t^2e^{3t}$$

$$v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-3t} & 0 \\ -3e^{-3t} & t \end{vmatrix}}{e^{-6t}} = \frac{te^{-3t}}{e^{-6t}} = te^{3t}.$$

Selanjutnya

$$v_1(t) = \int -t^2e^{3t}\,dt = -\frac{1}{3}\int t^2\,de^{3t} = -\frac{1}{3}t^2e^{3t} + \frac{1}{3}\int e^{3t}\,dt^2$$

$$= -\frac{1}{3}t^2e^{3t} + \frac{2}{3}\int te^{3t}\,dt = -\frac{1}{3}t^2e^{3t} + \frac{2}{9}\int t\,de^{3t}$$

$$= -\frac{1}{3}t^2e^{3t} + \frac{2}{9}te^{3t} - \frac{2}{9}\int e^{3t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}t^2e^{3t} + \frac{2}{9}te^{3t} - \frac{2}{27}e^{3t} + k_1$$

$$v_2(t) = \int te^{3t}\,dt = \frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t} + k_2$$

Jadi

$$y = \left(-\frac{1}{3}t^2e^{3t} + \frac{2}{9}te^{3t} - \frac{2}{27}e^{3t}\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t}\right)t\cdot e^{-3t}$$
$$+ k_1e^{-3t} + k_2te^{-3t}$$

$$y = \frac{1}{9}t - \frac{2}{27} + k_1e^{-3t} + k_2te^{-3t}$$

Syarat awal $y(0)=\frac{1}{2}$, artinya

$$\frac{1}{2} = -\frac{2}{27} + k_1 \quad \text{atau} \quad k_1 = \frac{31}{54}.$$

Dihitung y' terlebih dahulu untuk memenuhi syarat awal $y'(0)=-1$.

$$y' = \frac{1}{9} - 3k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-3t} - 3k_2 t e^{-3t}$$ untuk memenuhi syarat awal maka didapat

$$-1 = \frac{1}{9} - 3 + k_2 \quad \text{atau} \quad k_2 = 1\frac{8}{9}.$$

Jadi solusi dari masalah nilai awal contoh 5) adalah

$$y = \frac{1}{9}t - \frac{2}{27} + \frac{31}{54}e^{-3t} + 1\frac{8}{9}te^{-3t}.$$

Berikut ini dibahas contoh dari PD non homogen dengan persamaan homogennya mempunyai persamaan karakteristik dengan akar kompleks/imaginer.

Contoh 6) : $y'' + y ~~+ y~~ = \sin t$.

~~Akar~~ Persamaan karakteristik dari bentuk homogennya adalah $\lambda^2 + 1 = 0$. Sehingga akarnya $\lambda_1 = i$ atau $\lambda_2 = -i$, dan solusi umum bentuk homogenya $y = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$.

Dengan menggunakan formula Euler dapat dicari solusi rielnya yakni

$$y = k_1 \cos t + k_2 \sin t.$$

Dengan demikian untuk menyelesaikan contoh 6) dimisalkan solusinya berbentuk

$$y = v_1(t)\cos t + v_2(t)\sin t\,.$$

Diturunkan terhadap t diperoleh

$$y' = v_1'(t)\cos t - v_1(t)\sin t + v_2'(t)\sin t + v_2(t)\cos t\,.$$

Tetapkan $v_1'(t)\cos t + v_2'(t)\sin t = 0$, sehingga

y' menjadi $y' = -v_1(t)\sin t + v_2(t)\cos t\,.$

Akibatnya $y'' = -v_1'(t)\sin t - v_1(t)\cos t + v_2'(t)\cos t - v_2(t)\sin t\,.$

Mensubstitusikan ~~pada~~ y, y'' ke dalam contoh 6) diperoleh hasil

$$-v_1'(t)\sin t + v_2'(t)\cos t = \sin t\,.$$

Penggabungan hasil di atas, diperoleh sistem persamaan

$$v_1'(t)\cos t + v_2'(t)\sin t = 0$$
$$-v_1'(t)\sin t + v_2'(t)\cos t = \sin t\,.$$

Diselesaikan untuk $v_1'(t)$ dan $v_2'(t)$, hasilnya

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = \frac{-\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = -\sin^2 t$$

$$v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = \frac{\sin t \cdot \cos t}{1} = \sin t \cdot \cos t$$

$$v_1(t) = -\int \sin^2 t\, dt = -\int \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2t\right) dt = -\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t + l_1$$

$$v_2(t) = \int \sin t \cos t\, dt = \tfrac{1}{2}\int \sin 2t\, dt = \tfrac{-1}{4}\cos 2t + l_2$$

Jadi solusi dari contoh 6) adalah

$$y = \left(-\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t + l_1\right)\cos t + \left(\tfrac{-1}{4}\cos 2t + l_2\right)\sin t$$

$$y = -\tfrac{1}{2}t\cos t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\cos t - \tfrac{1}{4}\cos 2t \sin t + l_1\cos t + l_2 \sin t \quad \cdots (*)$$

Selanjutnya perhatikan contoh 7) yaitu

contoh 7) : $y'' + y = \sin 2t$.

Dengan proses seperti pada contoh 6) diperoleh

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \sin 2t & \cos t \end{vmatrix}}{1} = -\sin t \cdot \sin 2t$$

$$v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \sin 2t \end{vmatrix}}{1} = \cos t \cdot \sin 2t$$

$$v_1(t) = -\int \sin t \cdot \sin 2t\, dt = -\int\left(\tfrac{1}{2}\cos t - \tfrac{1}{2}\cos 3t\right)dt$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{6}\sin 3t + m_1$$

$$v_2(t) = \int \cos t \cdot \sin 2t\, dt = 2\int \cos t \cdot \sin t \cos t\, dt = -2\int \cos^2 t\, d\cos t$$

$$= -\tfrac{2}{3}\cos^3 t + m_2$$

Jadi solusi contoh 7) adalah

$$y = -\tfrac{1}{2}\sin t\cos t + \tfrac{1}{6}\sin 3t\cos t - \tfrac{2}{3}\sin t\cos^3 t + m_1\cos t + m_2 \sin t \quad \cdots (**)$$

Kalau kita perhatikan antara contoh 6) dan contoh 7) hanya berbeda pada bentuk non homogennya yakni $\sin t$ dan $\sin 2t$. Namun kalau kita lihat solusinya sangat berbeda (APA YANG MEMBEDAKAN?) Kesimpulan apa yang bisa anda catat?

- - - -

Dari halaman 19 sampai dengan 33 apa yang kita bahas hanya secara teknis tanpa landasan teori ~~yang~~. Sebenarnya kita sudah menggunakan beberapa konsep dan teorema. Untuk selanjutnya akan dibahas teorema apa saja yang dipakai dan konsep apa yang muncul.

Sebenarnya ada teorema yang sudah dipakai pada pembahasan di depan yakni *teorema super posisi* dan juga ada konsep bebas linier dan kombinasi linier. Misalkan kita mempunyai 2 buah fungsi f_1 dan f_2 maka kombinasi linier dari kedua fungsi tersebut adalah $c_1f_1 + c_2f_2$ dimana c_1 *dan* c_2 adalah sebar*ang* konstanta riel. Dua buah fungsi tersebut dikatakan saling bebas linier apabila persamaan $c_1f_1 + c_2f_2 = 0$ hanya dipenuhi oleh $c_1=0$ *dan* $c_2=0$. Teorema super posisi mengatakan: Apabila y_1 dan y_2 merupakan solusi dari suatu persamaan diferensial linier orde dua homogen maka kombinasi linier dari kedua solusi tersebut juga merupakan solusinya yakni $c_1y_1 + c_2y_2$ juga solusi.

Definisi bebas linier di atas merupakan definisi bebas linier dari dua buah *vector* secara umum (vector disini adalah elemen dari suatu Ruang Vektor atas suatu field (lapangan)). Fungsi disini dapat dipandang sebagai sebuah vector, karena pada dasarnya himpunan semua fungsi (untuk bahasan disini dibatasi pada fungsi bernilai riel) membentuk suatu ruang vector atas lapangan riel. Khusus untuk fungsi (vector fungsi) untuk menentukan dua fungsi saling bebas linier bisa menggunakan konsep determinan Wronskian. Determinan wronskian dari fungsi f_1 dan f_2 adalah $W(f_1, f_2)$ yang didefinisikan sebagai berikut $W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ dengan f_1' dan f_2' masing masing adalah turunan dari fungsi f_1 dan f_2.

Th 3.2.1 halaman 146 atau 168

Theorem 3.2.2 states that, beginning with only two solutions of Eq. (2), we can construct an infinite family of solutions by means of Eq. (7). The next question is whether all solutions of Eq. (2) are included in Eq. (7) or whether there may be other solutions of a different form.