Misalkan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan riel. Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian $\mathbb{R}$ merupakan field (lapangan) yakni $(\mathbb{R}, +)$ merupakan grup komutatif dan $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$ juga merupakan grup komutatif serta memenuhi sifat distribusi perkalian thd penjumlahan. Selain itu pada $\mathbb{R}$ juga berlaku sifat urutan artinya untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ hanya ~~ada~~ berlaku tepat satu dari tiga kemungkinan yaitu (i) $a < b$, (ii) $a = b$, atau (iii) $a > b$.

Lebih lanjut $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ yaitu himpunan pasangan berurutan dua bilangan riel, terhadap operasi penjumlahan $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ dan perkalian $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ merupakan field (lapangan) tetapi tidak berlaku sifat urutan.

Selanjutnya untuk $n > 2$ dapat dibentuk himpunan pasangan berurutan dari n buah bilangan riel yaitu $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$.

Dengan aturan penjumlahan

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

$\mathbb{R}^n$ merupakan ruang vektor.

Untuk $n=2$, $\mathbb{R}^2$ dapat dipandang sebagai sistem bilangan kompleks dengan $i = (0,1)$.

Sementara ini belum ada aturan perkalian yang didefinisikan yang mengakibatkan $\mathbb{R}^n$ (untuk $n > 2$) ~~yang~~ menjadi suatu field atau lapangan.

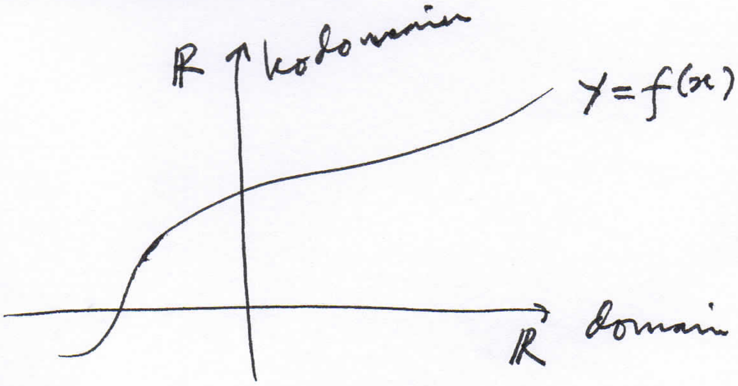
Misalkan ~~didefinisikan~~ diberikan fungsi $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Selanjutnya akan kita reviu mengenai turunan dan integral yang bisa diterapkan pada fungsi f tsb. Untuk itu kita tinjau beberapa kasus untuk beberapa nilai m dan n. (m dan n bilangan asli)

A. Kasus I : $m = n = 1$.

Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ disebut fungsi bernilai riil. Terkait dengan turunan dan integral telah kita pelajari pada kalkulus.

(A1) grafik :

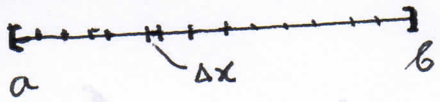


(A2) Turunan : $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

(A3) Integral : Riemann $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\,\Delta x$

(daerah integrasinya berupa interval tutup).

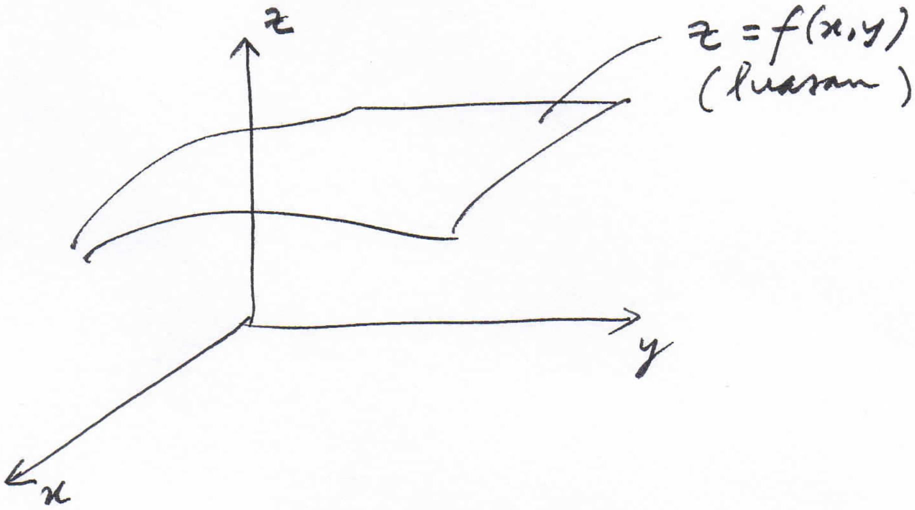
partisi pada [a,b]



B. <u>Kasus : $m = 2$, $n = 1$.</u>

Fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ disebut fungsi dua variabel bernilai riel.

(B1) Grafik :



(B2) Turunan : 1. Turunan parsial

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$. Notasi f_x, f_y.

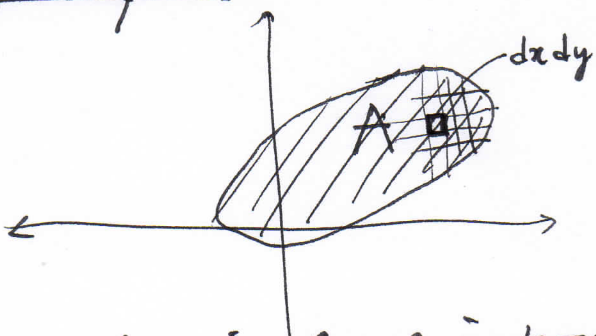
2. Turunan berarah (directional derivative)

(B3) Integral : 1. Dobel integral

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \quad \cancel{\text{atau} \iint}$$

Daerah/domain integralnya berupa wilayah atau bagian dari $\mathbb{R}^2$. (bisa berupa daerah persegi panjang atau bentuk yg lain)

~~2. Integral garis~~



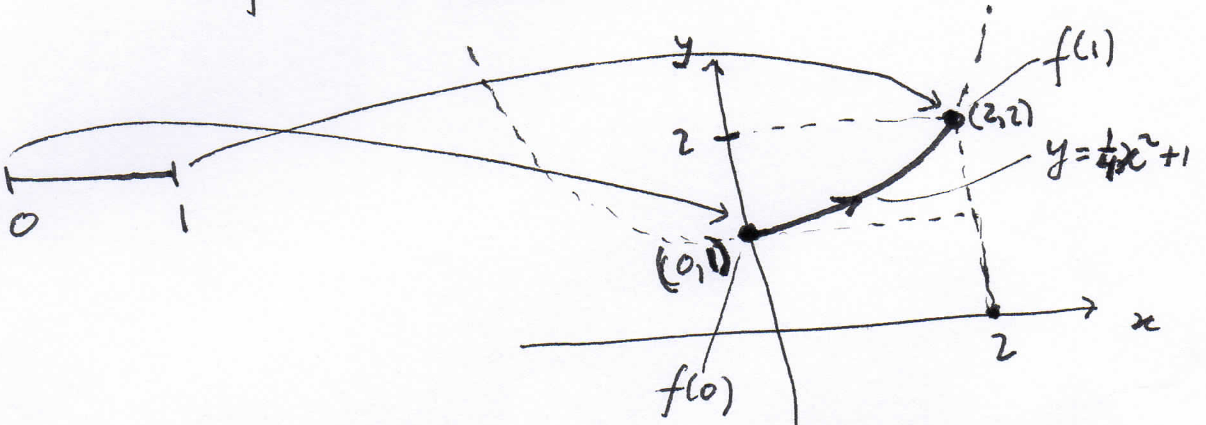
2. Integral garis : daerah integralnya berupa <u>kurva</u>

C. Kasus : $m=1$, $n=2$

Fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ disebut fungsi bernilai vektor

(C1). Grafik : hanya digambarkan range (daerah hasil) nya saja. (Dapat juga disebut kontur)

Contoh : $f(t) = (2t, t^2+1)$, $0 \le t \le 1$.



Contoh diatas dapat ditulis dalam bentuk parametrik

yaitu $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = t^2+1 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.

Untuk mendapatkan gambar rangenya dapat dilakukan dengan mengeliminasi t sehingga didapatkan hubungan antara y dengan x.

$x = 2t \longrightarrow t = \frac{x}{2}$

$y = t^2+1$

$\longrightarrow y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$

$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$

$t=0 \rightarrow x=0$, $t=1 \rightarrow x=2$

Jadi didapat $y = \frac{1}{4}x^2+1$, $0 \le x \le 2$.

(C2). Turunan : Misalkan $f(t) = (g(t), h(t))$, maka

$$\frac{df}{dt} = f'(t) = (g'(t), h'(t)).$$

(C3) Integral : $\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b g(t)\,dt, \int_a^b h(t)\,dt \right)$

Bentuk lain dari $f(t) = (g(t), h(t))$ adalah dalam bentuk vektor ~~f~~ yakni :

$$f(t) = g(t)\, i + h(t)\, j$$

dimana i dan j masing² vektor satuan arah sumbu-x dan sumbu y.

$$\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt}\, i + \frac{dh}{dt}\, j$$

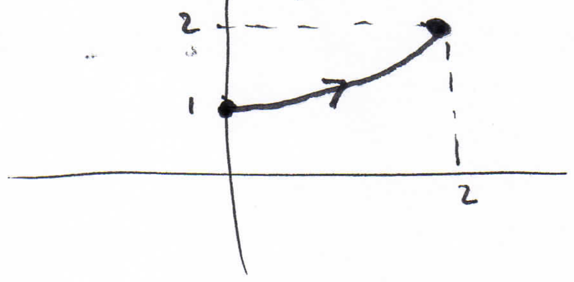
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt\, i + \int_a^b h(t)\,dt\, j$$

Analog dengan kasus C, dapat didefinisikan fungsi kompleks (fungsi bernilai kompleks) dengan domain himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$ ($\mathbb{C}$ = himpunan semua bilangan kompleks)

Contoh : $f(t) = 2t + i(t^2+1)$. $t \in [0,1]$.

Maka kalau konturnya digambarkan pada bidang kompleks ($\mathbb{C}$) sbb :



dan $f'(t) = 2 + i(2t)$, serta

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt + i\int_0^1 (t^2+1)\,dt$$

$$= 1 + \frac{4}{3}i$$

Secara umum fungsi kompleks dengan domain riel dapat ditulis sbb:

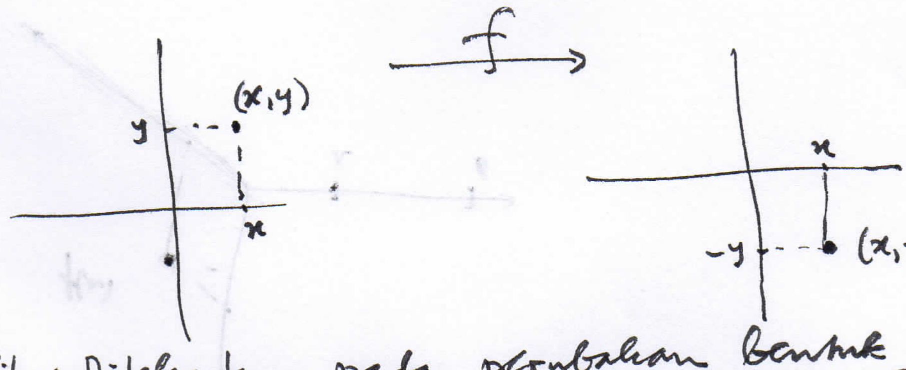
$$f(t) = u(t) + i v(t).$$

D. Kasus : $m=2$, $n=2$

Fungsi $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lebih dikenal sebagai transformasi / pemetaan.

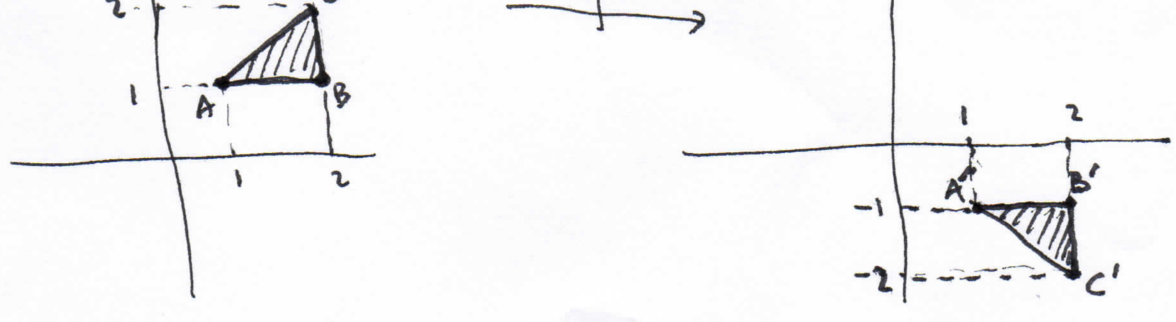
contoh : ① $f(x,y) = (x,-y)$. ② $g(x,y) = (x^2+y,\ 2xy^2)$

Fungsi ① ini dikenal sebagai transformasi yaitu pencerminan terhadap sumbu x.



(D1) Grafik : Ditekankan pada perubahan bentuk pada domain dengan bentuk yang terjadi di kodomain.

contoh:



(D2) Turunan : Transformasi linier / Matrik Jacobian.

Secara umum $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dapat ditulis

$$f(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$$

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$$ disebut matrik Jacobi

(D3) Integral : ???

Karena $\mathbb{R}^2$ dapat dipandang sebagai $\mathbb{C}$ (himpunan semua bilangan kompleks) maka fungsi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dapat dipandang sebagai fungsi $f : \mathbb{C} - \mathbb{C}$.

Sebagai contoh :

$f(x,y) = (x,-y)$ dapat dituliskan

$f(z) = \bar{z}$ (konjugat / sekawan dari z).

Selanjutnya akan dibahas <u>integral kontur</u> dari fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ terhadap kontur C (yang ada pada bidang z) yaitu yang dinotasikan

$$\int_C f(z)\,dz .$$

Misalkan $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yang dapat dituliskan sebagai $f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$, dimana $z = x + iy$.

Sedangkan kontur C (yang ada pada bidang Z) mempunyai bentuk parametrik

$$\begin{cases} x(t) = g(t) \\ y(t) = h(t) \end{cases} \quad \text{atau} \quad \begin{matrix} x = g(t) \\ y = h(t) \end{matrix} \quad , \; a \le t \le b .$$

dengan $g'(t)$, $h'(t)$ kontinu (atau kontinu sepotong-sepotong) pada interval tutup $[a, b]$.

Maka

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \Big(U(x,y) + i\,V(x,y)\Big)\, d(x+iy)$$

$$= \int_C \Big(U(g(t), h(t)) + i\,V(g(t), h(t))\Big)\, d\big(g(t) + i\,h(t)\big)$$

$$= \int_a^b \Big(U(g(t), h(t)) + i\,V(g(t), h(t))\Big)\big(g'(t) + i\,h'(t)\big)\,dt$$

atau dituliskan dalam bentuk U, V menjadi

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b \big(U \cdot g'(t) - V h'(t)\big)\,dt + i \int_a^b \big(U \cdot h'(t) + V g'(t)\big)\,dt .$$

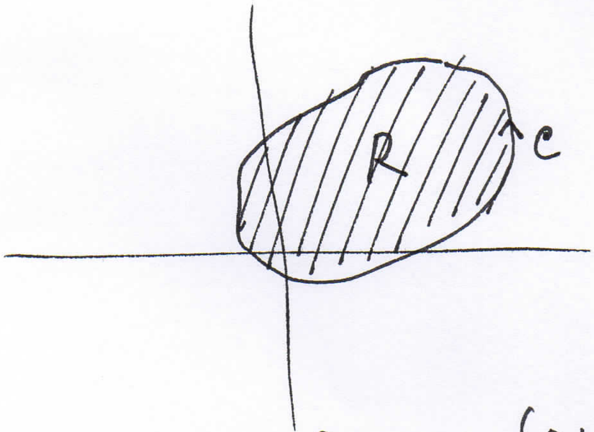
Dapat juga ditulis dalam bentuk integral garis (kurva)

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx)$$

jika C merupakan kontur tertutup sederhana maka,
Berdasar teorema Green dapat ditulis dalam bentuk dobel integral yaitu :

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA$$

Catatan :



Teorema Green : $\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$.