Sistem Dinamik 2

Definisi fungsi order :
Misalkan fungsi $\delta(\varepsilon)$ terdefinisikan pada $(0, \varepsilon_0]$ untuk suatu ε_0 bilangan positip.
Fungsi $\delta(\varepsilon)$ dikatakan fungsi order apabila memenuhi :

(a) kontinu dan positip pada $(0, \varepsilon_0]$

(b) $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon)$ ada

(c) $\delta(\varepsilon)$ turun monoton ketika $\varepsilon \to 0$.

Contoh : $\varepsilon |\ln \varepsilon|$, $\sin \varepsilon$.

Landau O-symbols

Notasi ini untuk membandingkan 2 buah fungsi order.

Definisi : Misalkan $\delta_1(\varepsilon)$ dan $\delta_2(\varepsilon)$ merupakan fungsi order.

(a) $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$ ketika $\varepsilon \to 0$, jika ada suatu konstanta $k \ni \delta_1(\varepsilon) \leq k\, \delta_2(\varepsilon)$.

(b) $\delta_1(\varepsilon) = o(\delta_2(\varepsilon))$ ketika $\varepsilon \to 0$, jika $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = 0$.

Catatan :
Untuk keadaan/kasus $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_2(\varepsilon)} = k$, maka dapat dikatakan $\delta_1(\varepsilon) = O(\delta_2(\varepsilon))$

Contoh : $\sin \varepsilon = O(\varepsilon)$ ketika $\varepsilon \to 0$.

Definisi : Misalkan fungsi vektor $f(t,x,\varepsilon)$ terdefinisikan pada $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

(a) $f(t,x,\varepsilon) = O(\delta(\varepsilon))$ apabila ada konstanta $k \ni$ $\|f\| \leq k\,\delta(\varepsilon)$ ketika $\varepsilon \to 0$

(b) $f(t,x,\varepsilon) = o(\delta(\varepsilon))$ apabila $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\|f\|}{\delta(\varepsilon)} = 0$.

<u>Contoh</u> : $f(t,x,\varepsilon) = \varepsilon t \sin x$ dengan $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$.
Maka dapat dikatakan $f(t,x,\varepsilon) = \varepsilon t \sin x = O(\varepsilon)$.
Tetapi estimasi $O(\varepsilon)$ tidak terpenuhi manakala $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Definisi "time-scale"</u> :

Misalkan fungsi vektor $f(t,x,\varepsilon)$ terdefinisikan pada $t \geq 0$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, dan. Fungsi $\delta_1(\varepsilon)$ dan $\delta_2(\varepsilon)$ merupakan fungsi order. Pernyataan "$f(t,x,\varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon))$ ketika $\varepsilon \to 0$ pada time-scale $1/\delta_2(\varepsilon)$" berarti bahwa estimasi tersebut valid pada (untuk) $x \in D$ dan $0 \leq t \cdot \delta_2(\varepsilon) \leq C$ dimana C suatu konstanta yang tidak bergantung pada ε.

Contoh 1: Misalkan $f(t,x,\varepsilon) = \varepsilon t \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ dan $t \geq 0$.

Maka $f(t,x,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ pada time-scale 1.

<u>Keterangan</u>: pada kasus ini $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon$, $\delta_2(\varepsilon) = 1$.

Kita tahu bahwa $-1 \leq \sin x \leq 1$ untuk $x \in \mathbb{R}$, maka $\|f(t,x,\varepsilon)\| = |\varepsilon t \sin x| \leq \varepsilon t$.

Apabila kita tetapkan/pilih suatu bilangan (konstanta) positip c sedemikian sehingga $0 \leq t \leq c$, maka akan berlaku

$$\|f(t,x,\varepsilon)\| = |\varepsilon t \sin x| \leq \varepsilon c.$$

Berdasarkan definisi bisa dituliskan $f(t,x,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ ketika $\varepsilon \to 0$.

Jadi: $f(t,x,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ valid untuk $x \in D$ dan $0 \leq t \leq c$.

<u>Contoh 2</u>: Misalkan $f(t,x,\varepsilon) = \varepsilon t \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ dan $t \geq 0$.

Maka $f(t,x,\varepsilon) = O(1)$ pada time scale $\frac{1}{\varepsilon}$.

<u>Keterangan</u>: Pada kasus ini $\delta_1(\varepsilon) = 1$ dan $\delta_2(\varepsilon) = \varepsilon$.

Diketahui bahwa $|\varepsilon t \sin x| \leq \varepsilon t$ untuk $x \in \mathbb{R}$.

Apabila kita pilih c_1 sdmkshg $\varepsilon t \leq c_1$, maka berlaku $\|f(t,x,\varepsilon)\| = |\varepsilon t \sin x| \leq \varepsilon t \leq c_1$.

Berdasar definisi $f(t,x,\varepsilon) = O(1)$ ketika $\varepsilon \to 0$ dan valid untuk $x \in \mathbb{R}$ serta $0 \leq \varepsilon t \leq c_1$ atau

$$0 \leq t \leq \frac{c_1}{\varepsilon}.$$

Definisi : Misalkan $f(t,x,\varepsilon)$ dan $g(t,x,\varepsilon)$ terdefinisikan pada $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Fungsi $g(t,x,\varepsilon)$ merupakan suatu aproksimasi asimtotik dari fungsi $f(t,x,\varepsilon)$ pada time-scale $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$, apabila $f(t,x,\varepsilon) - g(t,x,\varepsilon) = o(1)$ ketika $\varepsilon \to 0$ pada time-scale $\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$.

Aproksimasi dari suatu fungsi dapat dituliskan dalam bentuk ekspansi asimtotik sebagai berikut:

$$f(t,x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta_n(\varepsilon) f_n(t,x,\varepsilon) + o(\delta_N(\varepsilon))$$

dengan $\delta_n(\varepsilon)$ fungsi order untuk $n=0,1,\dots,N$ ~~dan~~ sedemikian shg $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n(\varepsilon))$, $n=0,\dots,N-1$, dan fungsi koefisien $f_n(t,x,\varepsilon)$ terbatas pada domain yg diberikan serta $O(1)$ ketika $\varepsilon \to 0$.