Misalkan $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0 i$, $w_0 = u_0 + v_0 i$ dan $f(z) = f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$.

Definisi 1: $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0} \Leftrightarrow \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon}$

Teorema 1: $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0} \Leftrightarrow \boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0, \ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0}$

Definisi 2: Fungsi kompleks f dikatakan kontinu di z_0 jika dan hanya jika (i) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ada,
(ii) $f(z_0)$ ada (terdefinisikan) dan
(iii) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Definisi 3: Fungsi kompleks f dikatakan diferensiabel (mempunyai turunan) di z_0 jika dan hanya jika

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ ada.}$$

Selanjutnya turunan fungsi kompleks f dinotasikan dengan f' atau $\frac{df}{dz}$ dan $f'(z_0)$ adalah turunan fungsi f di titik z_0.

<u>Teorema 2</u> : Misalkan $f(z) = U(x,y) + V(x,y)i$ dan $f'(z_0)$ ada di $z_0 = x_0 + y_0 i$.
Maka turunan parsial pertama dari $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ ada di titik (x_0, y_0) dan memenuhi persamaan Cauchy Riemann $U_x = V_y$ dan $U_y = -V_x$.
Lebih lanjut $f'(z_0) = U_x(x_0, y_0) + V_x(x_0, y_0)$.

Catatan : Persamaan Cauchy-Riemann merupakan <u>syarat perlu</u> untuk suatu fungsi terdiferensialkan. Sehingga apabila persamaan Cauchy-Riemann tidak terpenuhi maka fungsi tidak terdiferensialkan. Tapi sebaliknya apabila persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi <u>belum tentu</u> fungsinya dapat diturunkan

contoh :
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}.$$

(uraian lebih lanjut di halaman 3 & 4.)

$$f(z)=\frac{\bar{z}^2}{z}=\frac{\bar{z}^3}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}^3}{|z|^2}=\frac{(x-yi)^3}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^3-3x^2yi+3x(yi)^2-(yi)^3}{x^2+y^2}=\frac{x^3-3xy^2+(y^3-3x^2y)i}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}+\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}i$$

jadi :

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$ dan

$$v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$u_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$v_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^3}=1$$

$$u_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0$$

$$v_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

Persamaan Cauchy-Riemann dipenuhi yakni

$u_x(0,0)=v_y(0,0)=1$ dan $u_y(0,0)=-v_x(0,0)=0$.

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{(\bar{z})^2}{z} - 0}{z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \lim_{z\to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$$

a) Didekati sepanjang sumbu riel yakni $x \neq 0, y = 0$

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 = \lim_{\cancel{z}\to 0} \frac{(x-yi)^2}{(x+yi)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

b) Didekati sepanjang sumbu imaginer $(x=0, y\neq 0)$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}^2}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{(x-yi)^2}{(x+yi)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{(-yi)^2}{(yi)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{-y^2} = -1$$

Jadi $f'(0)$ tidak ada sebab dari dua ~~nilai~~ pendekatan nilai limitnya berbeda.

<u>Kesimpulan</u> : Persamaan Cauchy-Riemann dipenuhi di titik $(0,0)$ atau $z=0$, tetapi $f'(0)$ ~~=~~ tidak ada.

<u>Tugas</u> : ~~Cek~~ Bahwa u_x, u_y, v_x dan v_y tidak kontinu di $(0,0)$. Benarkah? cek!

Persamaan Cauchy-Riemann dapat menjadi <u>syarat cukup</u> untuk suatu fungsi terdiferensialkan apabila ada tambahan kondisi <u>kontinu</u>. Selengkapnya seperti pada teorema berikut:

Teorema 3: Misalkan fungsi kompleks f,

$$f(z) = U(x,y) + V(x,y)i$$ terdefinisikan

pada persekitaran (neighboorhood) dari $z_0 = x_0 + y_0 i$. Disamping itu, turunan parsial pertama dari $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ yakni U_x, V_x, U_y & V_y ada disetiap titik pada persekitaran $z_0 = x_0 + y_0 i$ dan kontinu di z_0.

Maka, apabila U_x, V_x, U_y dan V_y memenuhi persamaan Cauchy-Riemann yaitu

$$U_x = V_y \quad \text{dan} \quad U_y = -V_x$$

di titik z_0, ini mengakibatkan $f'(z_0)$ ada.

Cauchy-Riemann dalam polar:

Mis: $z = x + yi$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$z = r\cos\theta + i r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cdot e^{i\theta}.$$

$$f(z) = U(r,\theta) + V(r,\theta)i.$$

Persamaan Cauchy-Riemann nya:

$$U_r = \frac{1}{r}V_\theta \quad \text{dan} \quad \frac{1}{r}U_\theta = -V_r.$$

Fungsi Analitik

Fungsi kompleks f dikatakan analitik pada himpunan buka P apabila $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in P$.

~~Contoh 1 : $f(z) = \frac{1}{z}$ adalah analitik~~

Dengan demikian, apabila dikatakan f analitik di titik z_0 artinya f harus analitik pada suatu persekitaran dari z_0.

Contoh 1 : $f(z) = \frac{1}{z}$ analitik di setiap titik yang bukan titik nol.

Contoh 2 : $f(z) = |z|^2$ tidak analitik di setiap titik pada bidang kompleks, karena f mempunyai turunan hanya di titik nol.

Perhatikan beberapa fungsi berikut :

a) $f(z) = z + 1$

b) $f(z) = z^2$

c) $f(z) = z + i$

d) $f(z) = iz^2$.

Apakah ~~dan~~ berlaku bahwa $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$?

Syarat apa yang membuat pernyataan $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$?